Доклады Академии Наук СССР 1934
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS

МАТЕМАТИКА

Академик И. М. ВИНОГРАДОВ

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

1. В моей работе „Новое решение проблемы Варинга" (ДАН, 1934, т. II, № 6) было указано, что метод этой работы применим и ко многим другим проблемам теории чисел. Число таких проблем очень велико. Поэтому в настоящей статье я отмечу лишь небольшую их часть, именно я покажу к каким важным результатам можно придти, исходя лишь из одной леммы B указанной работы и ее обобщений.

2. Метод, положенный в основу вывода леммы B, приложим и к оценке всяких сумм вида

$$S=\sum_{x}\sum_{y} e^{2\pi i f(x,y)},$$

где x и y пробегают системы целых значений, соответственно находящихся среди чисел

$$M+1,\ M+2,\ \ldots,\ M+X;\quad N+1,\ N+2,\ \ldots,\ N+Y,$$

причем каждое свое значение x пробегает не более h раз, а y пробегает не более g раз.

Действительно, повторяя полностью в применении к этому случаю вывод леммы B, имеем:

$$|S|\leqq hg\sqrt{X\sum_{v=N+1}^{N+Y}\sum_{v_1=N+1}^{N+Y}|\Omega(v,v_1)|};\qquad \Omega=\Omega(v,v_1)=\sum_{u=M+1}^{M+X} e^{2\pi i\varphi(u)};$$

$$\varphi(u)=f(u,v)-f(u,v_1).$$

В сумме Ω переменное u пробегает ряд последовательных целых чисел. Она таким образом имеет обычный вид сумм, часто применяемых в аналитической теории чисел.

В целом ряде случаев для этой суммы известны удовлетворительные оценки.

3. Эти случаи следующие.

a) Когда $f(u, v)$ целый многочлен. Наиболее простой частный случай $f(u, v)=\alpha uv$, рассмотренный в лемме B указанной работы, не требует преобразования Вейля, так как здесь $\varphi(u)=u(v-v_1)$ линейная функция от u. Случай, когда $\varphi(u)$ многочлен степени выше 1-й, требует применения методы Вейля; окончательная же оценка суммы S, когда все суммы Ω уже оценены, требует дополнительных соображений (например полезна теорема Варинга и ее обобщения).

b) Когда в интервале $M+1\leqq u\leqq M+X$ имеем

$$\frac{1}{A}\leqq\varphi''(u)\leqq\frac{k}{A},$$

где k постоянное и A беспредельно растет, или же когда такому условию удовлетворяет какая-либо производная $\varphi^{(n)}(u)$ этой функции порядка $n>2$.

В последнем случае оценка достигается применением методы Вейля, переработанной последними работами Ван дер Корпута (1928 г.).

c) Когда $\varphi(u)$ многочлен с рациональными коэффициентами, причем общий знаменатель этих коэффициентов не слишком велик по сравнению с интервалом суммирования.

d) Наконец тот же метод применим и к оценке суммы вида

$$S = \sum_{x} \sum_{y} F(x, y),$$

где x и y пробегают те же значения, что и в § 2. Действительно, считая $F(x, y)$ вещественной, легко найдем:

$$|S| \leqq hg \sqrt{X \sum_{v=N+1}^{N+Y} \sum_{v_1=N+1}^{N+Y} |\Omega(v, v_1)|}; \qquad \Omega = \Omega(v, v_1) = \sum_{u=M+1}^{M+Y} \varphi(u);$$

$$\varphi(u) = F(u, v)\, F(u, v_1).$$

В сумме Ω переменное u опять таки пробегает последовательный ряд целых чисел и ее во многих случаях можно легко оценить.

4. Переменные x и y могут пробегать и пары значений, определяемые каким-либо другим способом, чем в § 2. Например, весьма важные приложения имеет случай, когда

$$x = \theta_1(\xi); \quad y = \theta_2(\eta, \zeta),$$

где ξ, η, ζ пробегают последовательные целые числа, причем точки (ξ, η, ζ) лежат в данной области пространства.

Такие суммы введением дополнительных суммирований и интегрирований сводятся к суммам, рассмотренным в пункте 3.

Весьма большую роль могут играть также суммы того же типа, как в § 3 и настоящем, но в которых суммирование производится по более чем двум переменным.

5. Приведем некоторые примеры применения сумм пунктов 3 и 4.

A. Суммы пункта (a), а именно случай $f(x, y) = \alpha xy$ уже применены нами к выводу теоремы Варинга. Этот вывод замечателен тем, что не требует применения методы Вейля. Он может быть существенно упрощен и улучшен и дает тогда лучшие оценки для S.

Следует однако отметить что этот метод можно осуществить и без сумм типа (a). Но тогда необходима метода Вейля. Например можно рассматривать интеграл

$$\int_0^1 U_\alpha^2\, T_\alpha^{4n-2} e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha;$$

$$U_\alpha = \sum_{u} e^{2\pi i \alpha u}; \qquad T_\alpha = \sum_{m=1}^{3P} e^{2\pi i \alpha m^n}; \quad u = x^2 + \xi,$$

где x и ξ пробегают значения, аналогичные значениям, которые пробегают x_1 и ξ в указанной нашей работе. Значения числа ξ проще однако составлять по способу, указанному в моей подробной работе о теореме Варинга, которая сейчас печатается в Трудах Физико-математического института Академии Наук. Числа P и k здесь берем равными:

$$P = \left[\frac{1}{3} N_0^{\frac{1}{n}} + 1\right]; \qquad k = [n(n-2)\lg 2 + 1]$$

и тогда для S получаем такое значение:

$$S = 2[n(n-2)\lg 2 + 2n],$$

т. е. еще более низкое, чем в указанной нашей работе.

Впрочем для S можно получить и еще более низкие значения. Наилучшие из вариантов выводов, которыми это достигается, я изложу в ближайшей статье.

Как пример других приложений сумм типа (a) приведу теорему.

Пусть α вещественное

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1; \quad q > 0; \quad |\theta| \leq 1; \quad 0 < \nu < 1,$$

и x и y пробегают значения § 2.

Тогда число H дробей $\{\alpha xy\}$, не превосходящих ν, выражается формулой:

$$H = \nu\xi\eta + R; \quad R \ll fg(XY)^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{q}{XY}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где ξ и η обозначают соответственно числа всех значений x и y.

Аналогичные теоремы получаем и для дробей более общего вида $\{f(x, y)\}$. Отсюда, например, выведем возможность приближаться с любой степенью точности к заданной иррациональности дробями вида

$$\frac{a}{xy} \text{ и вообще } \frac{a}{F(x, y)},$$

где a целое и $F(x, y)$ многочлен с целыми коэффициентами, ограниченный некоторыми условиями.

Например, каково бы ни было положительное X, число $\sqrt{2}$ можно представить в форме:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{p_1 p_2} + O\left(\frac{X^{\varepsilon}}{p_1 p_2 \sqrt{X}}\right); \qquad 0 < p_1 < X; \quad 0 < p_2 < X,$$

где p_1 и p_2 простые.

B. Из приложений сумм типа (b) в особенности отметим, что эти суммы в связи со сказанным в § 4 во многих важных случаях позволяют просто находить асимптотические выражения числа целых точек в данной области трех измерений.

Например асимптотическое выражение суммы

$$h(-1) + h(-2) + \ldots + h(-m),$$

где $h(-\Delta)$ число классов квадратичных форм определителя $-\Delta$, получается даже без применения методы Вейля с остаточным членом порядка

$$m^{0.7+\varepsilon},$$

а с примененнем методы Вейля порядок остаточного члена получается еще ниже. Точно также остаточный член в формуле, выражающей число целых точек внутри шаровой поверхности радиуса a, получается порядка

$$a^{1.4+\varepsilon}$$

и ниже. Подробный вывод изложенного здесь будет дан в ближайших статьях.

C. Суммы типа (c) и (d) тоже имеют приложения. Но об этом будет сказано в дальнейших работах.

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова.
Ленинград.

Поступило
16 VI 1934.

ON SOME NEW PROBLEMS OF THE THEORY OF NUMBERS

By I. VINOGRADOW, Member of the Academy

1. In my paper 'A new solution of Waring's problem' (C. R. de l'Acad. d. Sci. de l'URSS, 1934, vol. II, No 6) I pointed out that the method of that paper could be applied to many other problems of the theory of numbers. I shall therefore mention in the present paper only a small part of them, namely I shall show what important results follow from lemma B of the above quoted paper together with its generalizations.

2. The method on which the deduction of lemma B was based can be applied to the evaluation of all sums of the form

$$S=\sum_{x}\sum_{y} e^{2\pi i f(x,y)},$$

where x and y pass through systems of integral values which are among the numbers

$$M+1,\ M+2,\ldots\ M+X;\ N+1,\ N+2,\ldots\ N+Y,$$

where x passes through each of its values not more than h times and y — not more than g times.

Repeating in full the deduction of lemma B as applied to this case, we have

$$|S|\leq hg\sqrt{X\sum_{v=N+1}^{N+Y}\sum_{v_1=N+1}^{N+Y}|\Omega(v,v_1)|};\quad \Omega=\Omega(v,v_1)=\sum_{u=M+1}^{M+X} e^{2\pi i\varphi(u)}.$$

In the sum Ω the variable u passes through a series of consecutive integers. It has thus the usual form of sums frequently used in the analytic theory of numbers.

Satisfactory evaluations are known for this sum in a number of cases.

3. These cases are the following.

a) When $f(u,v)$ is an integral polynomial. The simplest individual case, $f(u,v)=\alpha uv$, discussed in lemma B of the paper referred to, does not require Weyl's transformations, for here $\varphi(u)=u(v-v_1)$ is a linear function of u. The case when $\varphi(u)$ is a polynomial raised to a power higher than the 1st, requires the application of Weyl's method, while the final evaluation of the sum S when all the sums of Ω have already been evaluated requires supplementary considerations (Waring's theorem and its generalizations are of use for example).

b) When in the interval $M+1\leq u\leq M+X$ we have

$$\frac{1}{A}\leq\varphi''(u)\leq\frac{k}{A},$$

where k is a constant and A increases infinitely, or when this condition is satisfied by some derivative $\varphi^{(n)}(u)$ of this function of the order $n>2$.

In this last case, evaluation is obtained by applying Weyl's method revised by the latest papers of Van der Corput (1928).

c) When $\varphi(u)$ is a polynomial with rational coefficients and when the common denominator of these coefficients is not too great in comparison with the interval of summation.

d) And lastly the same method is also applicable for the evaluation of the sums of the form

$$S=\sum_{x}\sum_{y}F(x,y),$$

where x and y pass through the same values as in § 2. And in fact, assuming $F(x,y)$ to be a real quantity, we shall easily find

$$|S|\leq hg\sqrt{X\sum_{v=N+1}^{N+Y}\sum_{v_1=N+1}^{N+Y}|\Omega(v,v_1)|};\quad \Omega=\Omega(v,v)=\sum_{u=M+1}^{N+Y}\varphi(u);$$
$$\varphi(u)=F(u,v)\,F(u,v_1).$$

In the sum Ω the variable u again passes through a consecutive series of integers, and in many cases the sum can be easily evaluated.

4. The variables x and y may also pass through pairs of values determined by some method other than in § 2. So the case when

$$x=\theta_1(\xi);\quad y=\theta_2(\eta,\zeta),$$

where ξ, η, ζ pass through consecutive integers, the points (ξ,η,ζ) lying within a given domain of space, has very important applications.

By introducing supplementary summations and integrations such sums are reduced to sums discussed in § 3.

A very important role may also be played by sums of the same type as those discussed in § 3, but where summation is made for more than two variables.

5. We shall show some examples of the application of the sums of §§ 3 and 4.

A. The sums discussed under (a), namely the case $f(x,y)=\alpha xy$, has already been used by us in deducing Waring's theorem. This deduction is remarkable for not needing the application of Weyl's method. It can be considerably simplified and improved and then gives better values for S.

Nevertheless we must point out that this method can also be used without sums of the type (a). But then Weyl's method is necessary. We can, for example, consider the integral

$$\int_0^1 U_\alpha^{\,2}\,T_\alpha^{4n-2}\;e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha;$$

$$U_\alpha=\sum{}'e^{2\pi i\alpha u},\quad T_\alpha=\sum_{m=1}^{3P}e^{2\pi i\alpha m^n}\qquad u=x^2+\xi,$$

where x and ξ pass through values analogous to the values x and ξ pass through in our above quoted paper. But it is simpler to compose the values of the number ξ by the method discussed in my detailed work on Waring's theorem, which will soon appear in 'Travaux de l'Institut Physico-Mathématique Stekloff de l'Académie des Sciences'. We take here the numbers P and k equal to

$$P=\left[\frac{1}{3}N_0^{\frac{1}{n}}+1\right];\qquad k=[n(n-2)\lg 2+1],$$

and then we get the following value for s

$$s=2\,[n(n-2)\lg 2+2n],$$

i. e. still lower than in our paper referred to above.

Still lower values, however, can be obtained for s. I shall discuss in my next paper the best variants of the deductions whereby this may be attained.

As an example of other applications of the sums of the type (a) I shall give a theorem.

Let α be a real quantity,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a,q) = 1; \quad q > 0; \quad (\theta) \leq 1; \quad 0 < \nu < 1,$$

and x and y pass through the values of § 2.

Then the number H of the fractions $\{\alpha xy\}$ which do not exceed ν is expressed by the formula

$$H = \nu\xi\eta + R; \quad R \ll fg(XY)^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{q}{XY}\right)^{\frac{1}{2}},$$

where ξ and η express the numbers of all the values of x and y respectively. We also get analogous theorems for fractions of a more general form $\{f(x,y)\}$. Hence, for example, we can deduce the possibility of approaching with any desired degree of exactitude to a given irrational number by fractions of the form

$$\frac{a}{xy} \text{ and in general } \frac{a}{F(x,y)},$$

where a is an integer and $F(x,y)$ a polynomial with integral coefficients and limited by certain conditions.

So, for example, whatever the positive number X may be, the number $\sqrt{2}$ can be expressed in the form

$$\sqrt{a} = \frac{a}{p_1 p_2} + 0\left(\frac{X^{\varepsilon}}{p_1 p_2 \sqrt{X}}\right); \quad 0 < p_1 < X; \quad 0 < p_2 < X,$$

where p and p_2 are prime numbers.

B. With regard to applications of the sums of the type (b) we shall specially note that these sums, as follows from the discussion in § 4, allow us in many important cases to find in a simple manner asymptotic expressions for the number of integral points in a given three-dimensional domain. For example, the asymptotic expression for the sum

$$h(-1) + h(-2) + \ldots + h(-m),$$

where $h(-\Delta)$, the number of classes of quadratic forms of the determinant $-\Delta$, is obtained even without using Weyl's method with a residual term of the order

$$m^{0.7+\varepsilon},$$

while using Weyl's method the remainder will be of a still lower order.

Likewise, the remainder in the formula expressing the number of integral points within a spherical surface of radius a is of the order

$$a^{1.4+\varepsilon}$$

and lower.

A detailed discussion of what has been set forth above will be given in my next papers.

C. Sums of the type (c) and (d) can also be applied. But this will be discussed in our next papers.

V. Stekloff Physico-Mathematical Institute of the Academy of Sciences. Leningrad.

Received 16. VI. 1934.

Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ

член-корреспондент Академии Наук СССР

НОВЫЙ ОБЩИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ КОНТУРНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Большинство существующих общих методов решения контурных задач, связанных с бигармоническим уравнением на плоскости (в частности задач теории упругусти), основываются на приведении их к интегральным уравнениям Фредгольма. Весьма удобным средством для этого является комплексное представление бигармонической функции, как это показано в опубликованных за последние годы работах В. А. Фока (1), С. Г. Михлина (2) и моих (3). Наиболее общий результат получен совсем недавно С. Г. Михлиным (2), решившим основные задачи плоской теории упругости для областей, ограниченных любым числом замкнутых контуров.* Однако методы, применяемые в названных работах, имеют один существенный недостаток: интегральные уравнения, к которым они приводят, давая возможность относительно просто доказать теоремы существования, мало пригодны для фактических вычислений, когда речь идет об областях, не принадлежащих к определенному частному классу. Действительно, уже для составления этих интегральных уравнений требуется предварительно конформно отобразить данную область на круг или же найти соответствующую функцию Грина.

В настоящей заметке я указываю метод решения, свободный от этого недостка и основанный, как и мой прежний метод, на простейших свойствах интегралов типа Коши.

§ 2. Пусть S некоторая область плоскости xy, ограниченная несколькими простыми замкнутыми контурами L_1, $L_2, \ldots, L_m$, L_{m+1}, из которых последний охватывает все предыдущие, так что S есть часть плоскости, находящаяся вне $L_1, \ldots L_m$ и внутри L_{m+1}. Через $S_1, \ldots, S_m$ мы будем обозначать части плоскости, заключенные внутри контуров $L_1, \ldots, L_m$, а через S_{m+1} — часть, находящуюся вне L_{m+1}. Полную границу $L_1 + \ldots + L_{m+1}$ области S будем обозначать через L. Мы будем считать, что координаты x, y точек контуров L_j имеют непрерывные производные по дуге s до 4-го порядка.**

Излагаемый ниже метод основан, как уже было сказано, на некоторых простых свойствах интегралов типа Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = F(z), \qquad [1]$$

где $z = x + iy$ — точка, не расположенная на L, $t = \xi + i\eta$ точка на L, а интеграл берется по L в положительном направлении относительно области S (при котором S остается слева); далее $f(t) = f_1 + if_2$ обозначает функцию точки t на L, удовлетворяющую условию типа Липшица.***

* Другой метод решения для этого случая указан в интересной статье Д. И. Шермана (4).

** Это условие может быть, несомненно, смягчено в значительной степени при применении менее простых способов доказательства.

*** Т. е. условию вида: $|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant A\,|t_1 - t_2|^{\alpha}$, при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Интеграл $F(z)$ представляет собою функцию комплексного переменного z, голоморфную внутри каждой из областей $S, S_1, \ldots, S_{m+1}$. При соблюдении названных выше условий, имеют место следующие предложения:*

1°. Если z стремится к точке t_0 границы L, оставаясь все время внутри, соответственно вне S, тогда $F(z)$ стремится (равномерно) к определенным пределам: $F_i(t_0)$, соответственно $F_e(t_0)$, причем:

$$F_i(t_0) = \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{t - t_0},$$
$$F_e(t_0) = -\frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{t - t_0}; \qquad [2]$$

в правых частях подразумеваются главные значения интегралов по Коши.

2°. Необходимым и достаточным условием того, чтобы $f(t)$ представляло собою контурное значение функции от z, голоморфной внутри S, заключается в том, чтобы $F(z) = 0$ для всех точек, расположенных вне S (т. е. внутри любой из областей S_j); это условие эквивалентно условию: $F_e(t_0) = 0$, где t_0 произвольная точка на L.

3°. Если $f(t)$ имеет на всех L_j производную порядка n по дуге s, удовлетворяющую условию типа Липшица, то не только $F(z)$, но и $F'(z), \ldots, F^{(n)}(z)$ равномерно стремятся к пределам при приближении z к точке на L, извне или изнутри (пределы при приближении извне или изнутри будут, вообще, различны).

§ 3. Перейдем теперь к решению основных контурных задач теории упругости, и для определенности остановимся на первой основной задаче, когда на контуре задаются внешние напряжения (решение второй задачи, когда задаются контурные смещения, совершенно аналогично). При помощи простого приема нашу задачу можно свести к случаю, когда главные векторы усилий, приложенных к каждому из контуров L_j в отдельности, равны нулю. Тогда задача приводится к следующей:** найти две функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, голоморфные в S и удовлетворяющие на L контурному условию:

$$\overline{\varphi}(\overline{t}) + \overline{t}\,\varphi'(t) + \psi(t) = f_1 - i f_2 + \overline{C}_j \quad (\text{на } L_j); \qquad [3]$$

здесь f_1, f_2 — заданные непрерывные и однозначные вещественные функции точки t границы L, а C_j — постоянные, из которых только одна может быть задана произвольно; мы будем считать, что $C_{m+1} = 0$. В формуле [3], а также и во всем дальнейшем, черта над буквой обозначает переход к сопряженному значению; через $\overline{\varphi}(\overline{z})$ обозначается выражение сопряженное с $\varphi(z)$.

Мы будем предполагать, что f_1 и f_2 имеют вторые производные по дуге, удовлетворяющие условию типа Липшица***, и что контурные значения φ, φ', ψ также удовлетворяют условию типа Липшица. Можно показать ([3]), что (если решение существует), постоянные C_j $(j \leqslant m)$ определяются условиями задачи вполне, а функция $\varphi(z)$ — с точностью до выражения: $kiz + \alpha + i\beta$, где k, α, β — вещественные произвольные постоянные; при зафиксированных α и β, функция $\psi(z)$ определяется вполне.

* Доказательство предложения 1° см., например, у Пикара ([5]). Предложение 3° легко выводится из 1° интегрированием по частям. Предложение 2° есть непосредственное следствие формул [2].

** См. мою работу ([3]).

*** Это условие может быть также смягчено.

Умножая обе части [3] на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$, где z — точка в н е S и интегрируя по L, получим, очевидно, для точек z, находящихся в S_j:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi}(\overline{t})\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{t}\,\varphi'(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_1-if_2}{t-z}\,dt-\overline{C_j}\equiv A(z)-\overline{C_j}. \qquad [4]$$

В каждой из областей S_j, выражение $A(z)$ есть заданная голоморфная функция.

Переходя к пределу $z\to t_0$, где t_0 точка L_j, получаем, согласно [2]:

$$-\frac{1}{2}\overline{\varphi}(\overline{t_0})+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi}(\overline{t})\,dt}{t-t_0}-\frac{1}{2}\overline{t_0}\varphi'(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{t}\,\varphi'(t)\,dt}{t-t_0}=A_e(t_0)-\overline{C_j}, \qquad [5]$$

где следует подразумевать главные значения интегралов. Для того чтобы получить уравнение, содержащее интегралы в обычном смысле, заметим, что в виду голоморфности функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ в области S, будем иметь, на основании предложения 2°, § 2:

$$-\frac{1}{2}\overline{\varphi}(\overline{t_0})-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\overline{t})\,d\overline{t}}{\overline{t}-\overline{t_0}}=0,\quad -\frac{1}{2}\varphi'(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(t)\,dt}{t-t_0}=0. \qquad [6]$$

(первая формула вытекает из упомянутого предложения, если перейти к сопряженным значениям). Прибавляя почленно к [5] первое из этих равенств и вычитая второе, умноженное на t_0, получаем:

$$-\overline{\varphi}(\overline{t_0})+\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi}(\overline{t})\left\{\frac{dt}{t-t_0}-\frac{d\overline{t}}{\overline{t}-\overline{t_0}}\right\}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi'(t)\,\frac{\overline{t}-\overline{t_0}}{t-t_0}\,dt=A_e(t_0)-\overline{C_j} \qquad [7]$$

или, преобразуя второй интеграл интегрированием по частям,

$$-\overline{\varphi}(\overline{t_0})-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi}(\overline{t})\,d\log\frac{\overline{t}-\overline{t_0}}{t-t}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\,d\frac{\overline{t}-\overline{t_0}}{t-t_0}=A_e(t_0)-\overline{C_j}. \qquad [8]$$

Полагая $\varphi(z)=p+iq$, $-A_e(t_0)=A_1(t_0)-iA_2(t_0)$, $C_j=C_j'+iC_j''$ и разделяя вещественные и мнимые части, получаем (при произвольно зафиксированных C_j) систему двух уравнений Фредгольма с р е г у л я р н ы м ядром. В этом легко убедиться, полагая $t-t_0=re^{i\vartheta}$, где r — расстояние между t и t_0, а ϑ угол, который хорда $\overrightarrow{t_0t}$ составляют с осью Ox, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки. Тогда уравнение [8] примет чрезвычайно простой вид:

$$\overline{\varphi}(\overline{t_0})-\frac{1}{\pi}\int_L\left\{\overline{\varphi}(\overline{t})+e^{-2i\vartheta}\varphi(t)\right\}d\vartheta=-A_e(t_0)+\overline{C_j} \qquad [9]$$

или, по разделении вещественных и мнимых частей,

$$\left.\begin{aligned} p(t_0)-\frac{1}{\pi}\int_L\{p(t)(1+\cos 2\vartheta)+q(t)\sin 2\vartheta\}\,d\vartheta&=A_1(t_0)+C_j',\\ q(t_0)-\frac{1}{\pi}\int_L\{p(t)\sin 2\vartheta+q(t)(1-\cos 2\vartheta)\}\,d\vartheta&=A_2(t_0)+C_j''.\end{aligned}\right\} \qquad [10]$$

Исследование полученных уравнений будет дано в следующей статье.

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова.
Ленинград.

Поступило
19 VI 1934.

NOUVELLE MÉTHODE GÉNÉRALE POUR RÉSOUDRE LES PROBLÉMES FONDAMENTAUX AUX LIMITES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ À DEUX DIMENSIONS

Par N. MUSCHELIŠVILI

membre correspondant de l'Académie

RÉSUMÉ

§ 1. L'emploi des fonctions d'une variable complexe fournit l'un des moyens les plus simples pour réduire les problèmes fondamentaux aux limites de l'élasticité à deux dimensions aux équations intégrales de Fredholm. Or, les équations intégrales obtenues jusqu'ici par cette voie [V. Fock(1), S. Michlin (2), l'auteur (3)], tout en étant très propres pour en tirer des conclusions générales*, sont à peu près inapplicables pour le calcul effectif (du moins lorsqu'il s'agit des domaines qui n'appartiennent pas à une certaine classe particulière). En effet, pour former ces équations on doit commencer par calculer la fonction de Green pour le domaine donné ou bien, lorsqu'il s'agit d'un domaine simplement connexe, d'effectuer la représentation conforme du domaine sur le cercle.

Dans cette note l'auteur indique une méthode différente, qui conduit à des équations intégrales bien simples, exemptes de ce défaut.

La méthode est fondée, comme la méthode antérieure de l'auteur (3), sur quelques propriétés simples des intégrales du type de Cauchy.

§ 2. Soit S un domaine connexe du plan xy limité par plusieurs contours fermés simples L_1, L_2,..., L_m, L_{m+1}, dont le dernier contient tous les autres à l'intérieur; soit $L = L_1 + \ldots + L_{m+1}$ la frontière totale du domaine S. La partie du plan extérieure à S est formée des domaines séparés finis $S_1, \ldots, S_m$ limités respectivement par $L_1, \ldots, L_m$ et du domaine infini S_{m+1} limité par L_{m+1}.

Bornons nous, pour fixer les idées, au premier problème aux limites, en entendant par là le cas où l'on donne les efforts appliqués au bord.** On peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que les résultantes générales des efforts appliqués à chaque contour séparément sont nulles (3).

Cela étant, le problème en question peut être réduit au problème suivant (3): trouver deux fonctions $\varphi(z)$, $\psi(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$ holomorphes dans S, qui satisfassent sur L à la condition

$$\overline{\varphi}(\overline{t}) + \overline{t}\varphi'(t) + \psi(t) = f_1 - if_2 + \overline{C}_j \ (\text{sur } L_j); \qquad (3)$$

dans cette formule $t = \xi + i\eta$ est un point variable sur L, f_1 et f_2 sont des fonctions réelles données sur L; $\overline{\varphi}(\overline{t})$ désigne la fonction conjuguée de $\varphi(t)$, $\overline{t} = \xi - i\eta$. Enfin, les C_j sont des constantes, inconnues à priori; l'une d'elles seulement peut être choisie arbitrairement et nous supposerons $C_{m+1} = 0$

* Les résultats les plus généraux ont été obtenus tout récemment par S. Michlin (l. c.) qui a démontré le premier les théorèmes d'existence pour les domaines multiplement connexes.

** On obtient la solution du deuxième problème (lorsqu'on donne les déplacements périphériques) d'une façon analogue.

En admettant que les courbes L_j et les fonctions f_1, f_2 satisfont à certaines conditions de régularité, on obtient par un artifice simple, fondé sur les propriétés des intégrales du type de Cauchy, l'équation intégrale

$$-\overline{\varphi}(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi}(\overline{t})\, d\log\frac{t-\overline{t_0}}{t-t_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\, d\,\frac{t-\overline{t_0}}{t-t_0} = A_e(t_0) - \overline{C_j}, \qquad [8]$$

t_0 étant un point arbitraire de $L_j (j = 1, \ldots, m+1)$, restant fixe pendant l'intégration et les intégrales étant prises dans le sens qui laisse S à gauche; $A_e(t_0)$ est une fonction connue du point de L, définie comme suit: si t_0 appartient à L_j, alors $A_e(t)$ est la valeur que prend la fonction, holomorphe dans S_j,

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_1 - if_1}{t-z}\, dt,$$

lorsque z tend vers t_0 en restant toujours intérieur à S_j.

En posant $t - t_0 = re^{i\vartheta}$ on obtient une équation très simple:

$$\overline{\varphi}(\overline{t_0}) - \frac{1}{\pi}\int_L \left\{ \overline{\varphi}(\overline{t}) + e^{-2i\vartheta}\varphi(t) \right\} d\vartheta = -A_e(t_0) + \overline{C_j}; \qquad [9]$$

dans cette équation ϑ a une signification géométrique immédiate: c'est l'angle que le vecteur $\overrightarrow{t_0 t}$ fait avec la direction positive de l'axe Ox mesuré dans le sens direct à partir de Ox

Si l'on sépare les parties réelles et imaginaires en posant $\varphi(z) = p + iq$, $-A_e = A_1 - iA_2$, $C_j = C_j' + C_j''$, on obtient le système de Fredholm

$$\begin{aligned} p(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_L \left\{ p(t)(1+\cos 2\vartheta) + q(t)\sin 2\vartheta \right\} d\vartheta &= A_1(t_0) + C_j', \\ q(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_L \left\{ p(t)\sin 2\vartheta + q(t)(1-\cos 2\vartheta) \right\} d\vartheta &= A_2(t_0) + C_j'' \end{aligned} \qquad [10]$$

dont le noyau est continu si les courbes L_j sont suffisamment régulières.

La discussion des équations ainsi obtenues est réservée à la note suivante.

Institut physico-mathématique V. Stekloff
de l'Académie des Sciences. Léningrad.

Manuscrit reçu
le 19. VI. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] V. Fock. C. R. (Paris), t. 182, 1926, p. 264. — В. А. Фок. Журн. Русск. физ.-хим. общ., ч. физ., т. 58, 1927, вып. 1, стр. 11. [2] S. Michlin. C. R. (Paris), t. 197, 1933, p. 608. — С. Г. Михлин. ДАН, т. I. № 6, 1934, стр. 295. [3] N. Muschelišvili. Math. Ann., Bd. 107, 1932. Изложение результатов предыдущей статьи можно найти в книге Н. И. Мусхелишвили: Некоторые задачи теории упругости, Изд. Акад. Наук, 1933. [4] Д. И. Шерман. ДАН, 1934, т. I, № 7, стр. 376. D. Šerman. C. R. de l'Acad. d. Sci. de l'URSS, 1934, v. I, № 7, p. 379. [5] E. Picard. Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, Paris, 1927.

МАТЕМАТИКА

Н. БЫСТРОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

(*Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 V 1934*)

§ 1. Метод, развитый Л. В. Канторовичем в его работе „Один прямой метод решения задачи о минимуме двойного интеграла"* (задачи равносильной решению некоторого дифференциального уравнения с двумя независимыми переменными) может быть применен и для приближенного решения задачи о минимуме тройного интеграла (равносильной решению дифференциального уравнения с тремя независимыми переменными).

Именно, рассмотрим задачу о нахождении минимума тройного интеграла:

$$I(u) = \iiint\limits_D \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + c\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + dy^2 + 2fu \right] dx\,dy\,dz \qquad [1]$$

при определенных граничных условиях, наложенных на замкнутой поверхности S, ограничивающей область интегрирования D, на функцию $u(x, y, z)$. Относительно функций $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ будем предполагать, что они в области интегрирования положительны. Задача равносильна решению уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial u}{\partial z}\right) - du = f \qquad [2]$$

при тех же граничных условиях.

Выбираем в промежутке интегрирования одной из переменных, например z, ряд значений: $z_1, z_2, \ldots z_n$ и введем n функций: $v_1(x, y)$, $v_2(x, y) \ldots v_n(x, y)$. Интерполированием строим функцию, при $z = z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$, обращающуюся соответственно в $v_1(x, y)$, $v_2(x, y) \ldots$ $\ldots v_n(x, y)$. Эта функция будет иметь вид: $U(x, y, z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(z)\, v_i(x, y)$, [3]

где все $\alpha_i(z)$ многочлены степени $n-1$. Будем решение задачи (приближенное) искать в виде [3].

Подставляя [3] в интеграл [1] и выполняя интегрирование по z, получим двойной интеграл:

$$\iint \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\varphi_{ik}(x, y) \frac{\partial v_i(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_k(x, y)}{\partial x} + \psi_{ik}(x, y) \frac{\partial v_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial y} + \right.\right. \qquad [4]$$

$$\left.\left. + \chi_{ik}(x, y)\, v_i(x, y)\, v_k(x, y) \right] + \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x, y)\, v_i(x, y) \right\} dx\,dy,$$

* Известия Акад. Наук, 1933.

где $\varphi_{ik}(x,y)$, $\psi_{ik}(x,y)$, $\mu_{ik}(x,y)$ и $\nu_i(x,y)$ — известные функции. Для нахождения системы функций $v_k(x,y)$, дающей минимальное значение этому интегралу, получим систему дифференциальных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\sum_{k=1}^{n}\varphi_{i,k}\frac{\partial v_k}{\partial x}\Big]+\frac{\partial}{\partial y}\Big[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_k}{\partial y}\cdot\psi_{ik}\Big]-\sum_{k=1}^{n}\mu_{ik}v_k-\nu_i=0. \qquad [5]$$

$$(i=1,2\ldots n)$$

Граничные условия для v_k определяются из граничных условий для $u(x,y,z)$ на поверхности S при $z=z_k$. Найдя таким образом все v_k, можем в качестве приближенного решения задачи взять $U(x,y,z)$, определяемую равенством [3].

§ 2. Рассмотрим в качестве примера задачу о распределении теплоты в теле, получающемся из кругового цилиндра с высотой и радиусом основания равными единице при разрезании его плоскостью, проходящей через ось. При этом предположим, что температура боковой поверхности и верхнего основания равна 0, а температура нижнего основания равна $+1$. Задача сводится к решению уравнения:

$$\Delta_2 u=0$$

при этих граничных условиях [$u(x,y,z)$ — температура в точке (x,y,z)] или к равносильной задаче о нахождении минимума интеграла:

$$\iiint\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2\Big]dx\,dy\,dz \qquad [6]$$

при тех же граничных условиях.

Приняв за начало координат центр цилиндра, выберем три значения для z: $z_1=\frac{1}{2}$, $z_2=0$, $z_3=\frac{1}{2}$ и введем три функции $v_1(x,y)=1$, $v_2(x,y)$, $v_3(x,y)=0$. Функцией, обращающейся при $z=-1/2,\ 0,\ +1/2$ соответственно в v_1, v_2, v_3 является функция:

$$U(x,y,z)=-z+2z^2+(1-4z^2)v_2(x,y).$$

Подставляя $U(x,y,z)$ вместо $u(x,y,z)$ в интеграл [6] и выполняя интегрирование по z, получим:

$$\iint\Big\{\frac{8}{15}\Big[\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v_2}{\partial y}\Big)^2\Big]+\frac{16}{3}v_2^2-\frac{16}{3}v_2+\frac{7}{3}\Big\}dx\,dy. \qquad [7]$$

Чтобы дать минимум интегралу [7], v_2 должно удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}-10v_2+5=0. \qquad [8]$$

Переходим к полярным координатам. Уравнение [8] заменяется следующим уравнением

$$r\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2}+\frac{\partial v_2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\vartheta^2}-10rv_2+5r=0. \qquad [9]$$

Решая уравнение [9] методом Л. В. Канторовича, заменяем его нахождением минимума интеграла:

$$\iint \left[r \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right)^2 + 10 v_2^2 - 10 r v_2 \right] dr\, d\theta. \qquad [10]$$

Выберем три значения для r: $r_1 = 0$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $r_3 = 1$ и введем три функции: $w_1(\theta) = 0$, $w_2(\theta)$, и $w_3(\theta) = 0$ (в силу граничных условий). Функция, при $r = 0, \frac{1}{2}, 1$ обращающаяся в 0, $w_2(\theta)$, 0, будет иметь вид

$$V(r, \theta) = (4r - 4r^2)\, w_2(\theta).$$

Подставляя в интеграл [10] и выполняя интегрирование, получим:

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{4}{3} (w_2')^2 + 40 w_2^2 - \frac{10}{3} w_2 \right] d\theta, \qquad [11]$$

откуда получаем для определения $w_2(\theta)$ уравнение:

$$w_2'' - 30 w_2 + \frac{5}{2} = 0.$$

Решив это уравнение и приняв во внимание начальные условия:

$$w_2(\theta)\,|_{\theta=0} = 0 \text{ и } w_2(\theta)\,|_{\theta=\pi} = 0,$$

найдем приближенное решение задачи о распределении тепла в рассматриваемом теле (в цилиндрических координатах):

$$U(r, \theta, z) = (-z + 2z^2) + (1 - 4z^2)(4r - 4r^2) \left[-\frac{1}{12} \operatorname{ch} \sqrt{30}\, \theta - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{12} \frac{1 - \operatorname{ch} \sqrt{30}\, \pi}{\operatorname{sh} \sqrt{30}\, \pi} \operatorname{sh} \sqrt{30}\, \theta \right].$$

Поступило
11 V 1934.

MATHEMATIK

ÜBER ANGENÄHERTE LÖSUNG VON PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT DREI UNABHÄNGIGEN VARIABLEN

Von N. BYSTROV

(*Vorgelegt von S. Bernstein, Mitglied der Akademie, d. 11. V. 1934*)

§ 1. Die von L. Kantorovič in seiner Arbeit „Eine direkte Methode zur Lösung des Minimumproblems für ein Doppelintegral“ (gleichbedeutend mit Lösung einer Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variablen) entwickelte Methode kann auch auf Gleichungen mit drei unabhängigen Variablen angewandt werden.

Suchen wir das Minimum des Integrals:

$$I(u)=\iiint\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+c\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+du^2+2fu\right]dx\,dy\,dz \qquad [1]$$

bei bestimmten Grenzbedingungen (a, b, $c>0$). Die Aufgabe ist äquivalent der Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial u}{\partial z}\right)-du=f \qquad [2]$$

bei denselben Grenzbedingungen. Wählen wir im Integrierungsintervall der z die Reihe von Werten: $z_1, z_2, \ldots z_n$ und bilden mittels Interpolation eine Funktion, welche bei $z=z_1,\ z_2 \ldots z_n$ entsprechend $v_1(x,y)$, $v_2(x,y)\ldots$ $v_n(x,y)$ gleich ist. Eine solche Funktion wird

$$U(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(z)\,v_i(x,y) \qquad [3]$$

sein, wo die $\alpha_i(z)$ bekannte Polynome von z sind.

Setzt man [3] in Integral [1] ein und führt das Integrieren über z aus, so erhält man das Doppelintegral:

$$\iint\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi_{ik}(x,y)\frac{\partial v_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x}+\psi_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial v_k}{\partial y}+\mu_{ik}(x,y,v_i(x,y)\,v_k(x,y)\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\nu_i(x,y)\,v_i(x,y)\right\}dx\,dy \qquad [4]$$

(φ_{ik}, ψ_{ik}, μ_{ik}, und ν_{ik} sind bekannte Funktionen). Zum Auffinden von v (x, y) haben wir das System der Eulerschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=1}^{n}\varphi_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{k=1}^{n}\psi_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial y}\right]+\sum_{k=1}^{n}\mu_{ik}v_k-\nu_i=0\,(i=1,2,\ldots n) \qquad [5]$$

Die Grenzbedingungen für v_k erhält man aus den Grenzbedingungen für u $(x, y\ z)$ bei $z=z_k$.

§ 2. Betrachten wir als Beispiel die Wärmeverteilung in einem Körper, den man aus einem Zylinder mit Höhe und Radius der Grundfläche $=1$ erhält, indem man ihn mit einer durch die Achse gehenden Ebene durchschneidet.

Nehmen mir die Temperatur der Seitenfläche und der oberen Grundfläche gleich 0 an und diejenige der unteren Grundfläche gleich $=+1^0$. Unter diesen Grenzbedingungen ist die Gleichung $\Delta_3 u=0$ zu lösen.

Die Aufgabe ist äquivalent dem Auffinden des Integralminimums bei denselben Grenzbedingungen. Wählen wir drei Werte von z: $z_1=-\frac{1}{2}$, $z_2=0$. $z_3=\frac{1}{2}$ und drei Funktionen: $v_1(x,y)=1$, $v_2(x,y)$, $v_3(x,y)=0$.

$$U(x,y,z)=-z+2z^2+(1-4z^2)\,v_2(x,g).$$

Setzen wir $U(x.y,z)$ statt $u(x,y,z)$ in das Integral

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz \qquad [6]$$

und führen das Integrieren über z aus, so erhalten wir:

$$\iint\left\{\frac{8}{15}\left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial r_2}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{16}{3}v_2^2-\frac{16}{3}v_2+\frac{7}{3}\right\}dx\,dy, \qquad [7]$$

woraus:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}-10\,v_2+5=0 \qquad [8]$$

Gehen wir zu den Polarkoordinaten über:

$$r\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2}+\frac{\partial v_2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\theta^2}-10\,rv_2+5\,r=0. \qquad [9]$$

Wenn man die Gleichung nach der Methode von Kantorovič löst, so ist das Minimum des Integrals

$$\iint\left[r\left(\frac{\partial v_2}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_2}{\partial\theta}\right)^2+10\,rv_2^2-10\,rv_2\right]dr\,d\theta \qquad [10]$$

zu finden. Wählen wir drei Werte von r: $r_1=0$, $r_2=\frac{1}{2}$, $r_3=1$ und drei Funktionen $w_1(\theta)=0$, $w_2(\theta)$, $w(\theta)=0$ (laut Randbedingungen).

Die Funktion, welche für $r=0$, $\frac{1}{2}$, 1, die Werte 0, $w_2(\theta)$, 0 annimmt, hat die Form:

$$V(r,\theta)=(4r-4r^2)\,w_2(\theta).$$

Setzt man $V(r,\theta)$ statt $v_2(r,\theta)$ in das Integral [10] ein und führt das Integrieren über r aus, so erhält man

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{4}{3}(w_2')^2+40\,w_2-\frac{10}{3}w_2\right]d\theta, \qquad [11]$$

woher:

$$w_2''-30\,w_2+\frac{5}{2}=0.$$

Wenn man diese Gleichung bei gegebenen Grenzbedingungen löst, so ergibt sich die angenäherte Lösung der Aufgabe:

$$U(r,\theta,z)=(-z+2z^2)+(1-4z^2)(4r-4r^2)\left[-\frac{1}{12}ch\sqrt{30}\,\theta-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{12}\frac{1-ch\sqrt{30}\,\pi}{sh\sqrt{30}\,\pi}ch\sqrt{30}\,\theta\right].$$

Eingegangen
d. 11. V. 1934.

МАТЕМАТИКА

П. С. НОВИКОВ

К ТЕОРИИ РЕЛЯТИВНОГО КОНТИНУУМА

(*Представлено академиком Н. Н. Лузиным 28 IV 1934*)

В релятивной теории функций, определенных на каком-либо произвольном множестве, многие определения, как например: определения непрерывных функций, функций измеримых по Борелю, могут быть даны аналогично тому, как это делается для функций, определенных всюду. Но во многих случаях остается открытым вопрос: в какой мере теоремы, справедливые для функций, определенных всюду, сохраняются для функций, определенных на каком-либо множестве. Таким, например, является вопрос о существовании функций не измеримых B, определенных на каком-либо несчетном множестве. Настоящая работа имеет целью показать, что на всяком множестве не 1-й категории существует функция неизмеримая B. При доказательстве этой теоремы мы будем пользоваться принципом произвольного выбора. Вместо релятивного определения функций измеримых B, мы возьмем другое, ему эквивалентное, но более удобное. Мы будем называть функцией измеримой B на множестве E такую функцию, которая может быть дополнена до функции измеримой B и определенной всюду.

Нужно заметить, что при гипотезе $\aleph_1 = C$ высказанный результат тривиален, и более того: в этом случае можно утверждать, что на всяком несчетном множестве существуют функции, неизмеримые по Борелю. В дальнейшем мы будем пользоваться следующей терминологией, принадлежащей Н. Н. Лузину, как наиболее удобной. Множество, состоящее из суммы счетного числа нигде не плотных множеств, мы будем называть множеством 1-й категории. Множеством 2-й категории в данной области будем называть дополнение к множеству 1-й категории на данной области. И наконец, множеством 3-й категории в данной области будем называть такое множество, которое в каждой области, составляющей часть данной области, ни 1-й, ни 2-й категории. Ясно, что для всякого множества не 1-й категории существует область, где оно 2-й или 3-й категории. Множества, обладающие свойством Бера, в этой терминологии определяются как множества, которые не могут быть 3-й категории ни в какой области. Для краткости в дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями: прямые в плоскости (xy), параллельные оси y, будем обозначать d_x, где x — абсцисса точки пересечения прямой с осью x. Прямые в пространстве xyz, параллельные оси z, будем обозначать d_{xy}, где x и y — координаты точки пересечения прямой с плоскостью xy. Аналогичным образом прямые, параллельные оси y, обозначим d_{xz} — оси x — d_{yz}. Полосу $a<y<b$ будем обозначать G_{ab} плоскости и G_{ab}' в пространстве. Проекцию плоского множества L на ось x будем обозначать $P_x(L)$, а проекцию пространственного множества M на плоскость xy — $P_{xy}(M)$.

Лемма 1. *Плоское множество E, для которого $P_x(E)$ не 1-й категории на оси x и $d_x E$ не 1-й категории на d_x, для $x < P_x(E)$ есть множество не 1-й категории на плоскости.*

Доказательство. Предположим, что E представлено в виде суммы счетного числа множеств: $E_1, E_2, \ldots E_n \ldots$

Рассмотрим полосу $p < y < q$, где p и q произвольные рациональные числа Отберем на прямых d_x интервалы $p < y < q$, на которых E_k или 2-й или 3-й категории Обозначим часть E_k, содержащуюся в множестве этих интервалов, M^k_{pq}. Пусть $x_0 < P_x(E)$, тогда $d_{x_0} E$ есть множество не 1-й категории на d_{x_0}, $d_{x_0} E = d_{x_0} E_1 + d_{x_0} E_2 + d_{x_0} E_3 + \ldots d_{x_0} E_n + \ldots$ Следовательно, по крайней мере одно из множеств $d_{x_0} E_n$, например $d_{x_0} E_e$, не 1-й категории на d_{x_0}. Тогда на прямой d_{x_0} найдется интервал с рациональным и концами $a < y < b$, на котором $d_{x_0} E_e$ 2-й или 3-й категории. Часть $d_{x_0} E$, содержащаяся в этом интервале, принадлежит множеству M^e_{ab}. Следовательно,

$$x_0 < P_x\left(M^e_{ab}\right) \quad \text{и} \quad \sum_{p,\,q,\,k} P_x\left(M^k_{pq}\right) = P_x(E)$$

(суммирование распространяется по всем рациональным числам p и q и целым положительным K). Так как $P_x(E)$ не 1-й категории на оси x, то найдется по крайней мере одно множество $P_x\left(M^m_{\alpha\beta}\right)$ не 1-й категории на оси x и, следовательно, найдется интервал $e < x < f$, на котором $P_x\left(M^m_{\alpha\beta}\right)$ 2-й или 3-й категории.

Рассмотрим множество $M^m_{\alpha\beta}$ в прямоугольнике $e < x < f$, $e < y < b$. Оно содержится в множестве интервалов $\alpha < y < \beta$, $x = C$, где C пробегает по всем точкам $P_x\left(M^m_{\alpha\beta}\right)$. Это множество интервалов всюду плотно в прямоугольнике $e < x < f$, $\alpha < y < \beta$; в самом деле, $P_x\left(M^m_{\alpha\beta}\right)$ всюду плотно в интервале $e < x < f$ и кроме того $M^m_{\alpha\beta}$ всюду плотно на каждом из интервалов $\alpha < y < \beta$, $x = C$. Следовательно, $M^m_{\alpha\beta}$ всюду плотно в рассматриваемом прямоугольнике. Но $M^m_{\alpha\beta}$ есть часть E_m, и, следовательно, E_m всюду плотно в этом прямоугольнике. Из доказанного вытекает, что E не может быть представлено в виде суммы счетного числа множеств нигде не плотных на плоскости, т, е. E есть не 1-й категории на плоскости.

Лемма 2. *Всякое плоское множество E, обладающее на плоскости свойством Бера и пересекающееся с каждой прямой d_x по множеству первой категории на d_x, есть множество 1-й категории на плоскости.*

Доказательство. Предположим противное: пусть E не 1-й категории на плоскости, тогда найдется прямоугольник $a < x < b$, $\alpha < y < \beta$, на котором E 2-й категории. Часть CE, расположенная в этом прямоугольнике, пересекается с каждой прямой d_x по множеству 2-й категории. Следовательно, на основании предыдущей леммы, эта часть CE не 1-й категории на плоскости. Тогда существует прямоугольник $\alpha' < x < b'$, $\alpha' < y < \beta'$, содержащийся в прямоугольнике $a < x < b$, $\alpha < y < \beta$ и такой, что CE на нем также 2-й категории. Следовательно, мы приходим к противоречию. и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть дано плоское множество измеримое B: ε, пересекающееся с каждой прямой d_x не более как по счетному числу точек. Множество точек оси x, для которых $d_x \varepsilon$ нигде не плотно на d_x, есть множество измеримое B.*

Пусть a и b какие то действительные числа, $a < b$. Рассмотрим множество $Q_{ab} = \prod_{g,\,h} P_x\,(G_{gh}\,\varepsilon)$ (g и h пробегают по всем рациональным числам, для которых $a < g < h < b$). Легко видеть, что Q_{ab} есть множество точек оси x, для которых ε плотно на интервале прямой d_x $a < y < b$. Каждое множество $P_x\,(G_{gh}\,\varepsilon)$ есть множество измеримое B, как проекция плоского множества $G_{gh}\,\varepsilon$, пересекающегося с каждой прямой d_x неболее как по счетному числу точек. Рассмотрим множество $\Sigma\, Q_{pq}$ (суммирование по всем рациональным p и q). Это есть множество точек оси x, для которых $d_x \varepsilon$ плотно на каком либо интервале прямой d_x. Это множество измеримо по Борелю. и следовательно его дополнение измеримо по Борелю. Но дополнение к множеству $\Sigma\, Q_{pq}$ есть множество тех точек, для которых $d_x \varepsilon$ нигде не плотно на d_x, и следовательно лемма доказана.

Пусть ε плоское множество. Замкнем его вдоль прямых d_x; полученное множество мы будем обозначать $\varepsilon^{(y)}$.

Лемма 4. *Если ε есть плоское множество измеримое B, то $\varepsilon^{(y)}$ есть аналитическое множество.*

Для удобства рассуждений будем предполагать, что ε расположено внутри квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ z = 0$ в пространстве. Рассмотрим параллелепипед $-1 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$ и через каждую точку ε проведем прямую $y + z = k$, $x = c$. Часть множества этих прямых, расположенных внутри нашего параллелепипеда, обозначим буквой F. Пусть M есть множество точек плоскости xz, или принадлежащих к F, или предельных к $d_{xz} F$. Тогда

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \left(G^{\frac{-1}{n} + \frac{1}{n}} F \right)$$

есть аналитическое множество как пересечение проекций множеств измеримых B $G^{\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}} F$. Не трудно видеть, что $\varepsilon^{(y)}$ мы получим спроектировав M на плоскость (x, y) прямыми параллельными $y + z = a$, $x = c$, и следовательно $\varepsilon^{(y)}$ тоже аналитическое множество.

Теорема. На каждом множестве не 1-й категории существует функция не измеримая по Борелю.

Доказательство. Пусть E множество не 1-й категории, расположенное на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$. Мы предположим, что оно вполне упорядочено (на основании теоремы Цермело), и точки его поставлены в соответствие трансфинитным числам α. Расположим на сегменте оси y множество E', конгруэнтное E, и точкам (o, a) E' поставим в соответствие те трансфиниты, которые соответствуют точкам (a, o) множества E. Через точки множества E проведем прямые, параллельные оси y, а через точки E' прямые, параллельные оси ox. Пересечение первой совокупности прямых во второй назовем R_E. Каждой точке $M(x, y)$, принадлежащей R_E, можно поставить в соответствие пару трансфинитных чисел α и β, где α есть трансфинитное число, которое мы поставили в соответствие точке (x, o), а β точке (o, y). Точку $M(x, y)$ мы будем еще обозначать $M(\alpha, \beta)$. Разобьем R_E на три части; первую, состоящую из точек, для которых $\alpha < \beta$, вторую из точек с $\alpha < \beta$ и третью из точек с $\alpha = \beta$. Первая и вторая части конгруэнтны, третья расположена на биссектрисе координатного угла. В силу леммы 1 R_E не 1-й категории на плоскости, и так как 3-я часть 1-й категории, первые две — не 1-й категории на плоскости. Обозначим первую часть S_E.

Рассмотрим множество тех трансфинитных чисел α, для которых $d_x S_E$ не 1-й категории на d_x ($x > E$ и соответствует α). Возьмем наименьший из них, пусть это будет μ, а соответствующая ему точка E пусть будет k. Обозначим множество точек, входящее в E, для которых трансфинитные номера меньше μ, через E_1. Очевидно, $E_1 < E$, $R_{E_1} < R_E$, $S_{E_1} < S_E$. Для точек $d_k S_E$ трансфинитное число α постоянно и равно μ, а β не может превзойти μ по определению S_E, и, следовательно, множество $d_k S_E$ конгруэнтно множеству точек, входящих в E, для которых $\alpha < \mu$, т. е. E_1. Так как $d_k S_{E_1}$ не 1-й категории на d_k, то и E_1 не 1-й категории на оси x. Итак E_1 есть часть E, E_1 не 1-й категории на оси x, а каждое множество $d_x S_E$ 1-й категории на d_x. Если на E_1 существует функция не измеримая по Борелю, то конечно и на E тоже, следовательно для нашей цели достаточно доказать существование неизмеримых по Борелю на таких множествах E не 1-й категории, для которых каждое множество $d_x E$ 1-й категории на d_x. Итак, пусть $d_x S_E$ всегда 1-й категории на d_x, тогда оно может быть представлено в форме $d_x S_E = L_{x1} + L_{x2} \ldots + L_{xn} + \ldots$, где каждое L_{xn} нигде не плотно на d_x. С помощью принципа произвольного выбора можно представить S_E в виде $S_1 + S_2 + \ldots S_n + \ldots$, где каждое $d_x S_n$ нигде не плотно на d_x. S_E не 1-й категории, следовательно существует по крайней мере одно множество S_m не 1-й категории. Рассмотрим множество $S_m^{(y)}$; каждое множество $d_x S_m^{(y)}$ замкнуто и нигде не плотно на d_x. Выделим счетное множество точек, плотное на $d_x S_m^{(y)}$, $a_{x1}, a_{x2} \ldots, a_{xn} \ldots$, Сумму

всех таких счетных множеств обозначим N. N есть плоское множество, пересекающееся с каждой прямой d_x не более как по счетному числу точек; его можно разбить нас четное число однозначных кривых $N_1, N_2, \ldots N_n \ldots$ Кроме того $N^{(y)} = S_m^{(y)}$. Докажем, что одна из кривых N_n не измерима по Борелю на множестве E; предположим противное, тогда все N_n функции измеримые B на E и могут быть дополнены до функций измеримых B на всем сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть $M_1\ M_2 \ldots\ M_n \ldots$ кривые измеримые B такие, что $M_k > N_k$ для каждого целого числа k и M их сумма; на основании леммы 3 есть множество точек оси x, для которых $d_x M$ нигде не плотно на d_x есть множество измеримое B. Восстановим из точек этого множества перпендикуляры оси x и рассмотрим часть M, содержащуюся в множестве этих перпендикуляров. Обозначим ее буквой D. Ясно, что D есть множество измеримое B и содержит N; следовательно: $D^{(y)} > N^{(y)} = S_m^{(y)}$. На основании леммы 4 $D^{(y)}$ есть аналитическое множество. $d_x\ D^{(y)}$ нигде не плотно на d_x для каждого x, и так как $D^{(y)}$ обладает свойством Бера, то на основании леммы 2 $D^{(y)}$ есть множество 1-й категории на плоскости. Отсюда следует, что $S_m^{(y)}$ и, следовательно, S_m также; мы пришли к противоречию, и теорема доказана.

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова.
Ленинград.

Поступило
10 IV 1934.

MATHÉMATIQUES

SUR LE CONTINU RELATIVISTE

Par P. NOVIKOV

(*Présenté par N. Lusin, de l'Académie, le 28. IV. 1934*)

RÉSUMÉ

Dans la présente note nous étudions une question concernant les fonctions définies sur un ensemble E quelconque. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie sur un ensemble E; s'il existe une fonction $f(x)$, définie partout et mesurable B, coïncidant avec $\varphi(x)$ sur l'ensemble E, nous dirons que $\varphi(x)$ est mesurable B sur E. On sait qu'il existe des fonctions définies partout non mesurables B. On peut poser la question s'il en est de même pour les fonctions définies sur un ensemble E.

Dans la présente note, nous démontrons la proposition suivante: *sur tout ensemble qui n'est pas de première catégorie il existe toujours une fonction non mesurable B.*

Institut physico-mathématique V. Stekloff
de l'Académie des Sciences. Leningrad.

Manuscrit reçu
le 10. IV. 1934.

ФИЗИКА

С. А. АРЦЫБЫШЕВ

ПРОНИКНОВЕНИЕ МЕДИ ПУТЕМ ЭЛЕКТРОЛИЗА И ДИФФУЗИИ В КАМЕННУЮ СОЛЬ*

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 20 V 1934*)

1. Методы обнаружения меди. Весьма чувствительным индикатором, позволяющим обнаружить присутствие меди в каменной соли, служит изменение цвета аддитивно-окрашенной соли. Так, кусок чистой каменной соли, погруженной в жидкий натр при температуре около 700°, через некоторое время становится серовато-синим (коллоидальная окраска).

* Частично в изложенных ниже работах принимали участие Г. А. Парфианович и А. С. Топорец.

Та же часть соли, в которой имеется медь, становится грязно-красной, почти непрозрачной.

При аддитивном окрашивании соли под током, на границе зоны, в которой есть медь, выпадает устойчивый ярко-красный слой, не разрушающийся ни нагреванием, ни действием электрического поля. Ничтожная примесь меди может быть таким образом обнаружена.

Кроме того, присутствие в кристаллах меди, равно как и других загрязнений, может быть легко обнаружено сильной фосфоресценцией загрязненных областей.

Помимо этих специальных методов, хорошие услуги оказывает обычный химический анализ и в особенности спектроскопия.

2. Термическая диффузия. Если зажать в специальном станочке кристалл каменной соли между двумя медными пластинками и затем продержать его в течение нескольких часов при высокой температуре, то в соли можно спектроскопически обнаружить медь. Но здесь особенно удобен второй из описанных в предыдущем параграфе способов, позволяющий весьма точно определить глубину проникновения меди в каменную соль. Оказывается, диффузия меди идет весьма быстро. Так, при температуре около 760°, за 3 часа медь проникает на глубину 4 мм. Что же касается диффузии других металлов, то она либо вовсе не происходит, либо идет крайне медленно. Может быть необычайно быструю диффузию меди можно объяснить тем обстоятельством, что радиусы ионов меди и натрия по Гольдшмитту почти одинаковы—97 и 98.

3. Электролиз меди. При окраске каменной соли под током, ярко-красный слой, так называемая „шапочка", появляется около самого медного анода. Если до окраски пропускать через кристалл в течение некоторого времени ток при высокой температуре, то при последующей окраске „шапочка" образуется на значительном расстоянии от анода. Это расстояние пропорционально времени, в течение которого через кристалл предварительно пропускался ток, и приложенному напряжению. Шапочка образуется на границе зоны, занятой ионами меди, проникшими в кристалл. Ее образование вызывают электроны, выходящие из металлического натрия в процессе окрашивания.

Как известно, в окрашенном кристалле электроны могут располагаться на двух энергетических уровнях F и U. Энергия связи F-электронов около 2.5 вольт. Они то как раз и обуславливают окраску каменной соли. Энергия связи U-электронов около 6.4 вольт. Они вызывают поглощение в ультрафиолете. Было интересно выяснить, какие именно электроны вызывают образование красной шапочки. Для этого был проделан следующий опыт: значала кристалл был окрашен под током до определенной нанесенной на нем метки, затем путем изменения направления тока он был обесцвечен. После этой операции кристалл становится вновь совершенно прозрачным, так как вызывающие поглощение видимого света F-центры из него убраны током. Но U-центры, как известно, в электрическом поле не перемещаются, оставаясь на тех местах, где они образовались.

После предварительной обработки, верхушка кристалла, в которой был заложен металлический натрий, скалывалась, кристалл зажимался между медными электродами, и вновь пропускался ток при высокой температуре. Через некоторое время против метки, на границе области занятой U-электронами, образовалась типичная красная шапочка. Таким образом было доказано, что U-электроны также играют существенную роль в образовании красного коллоида.

Аналогические опыты были проделаны с электродами из других металлов, но пока без определенных результатов.

4. Красные шапочки в аддитивно-окрашенной соли. Эти шапочки образуются при обычном аддитивном окрашивании без тока там, где окраска близко подходит к поверхности кристалла. Впервые они подробно описаны у Рексера (1), причем природа их оставалась совершенно загадочной. Мы промерили кривые поглощения этих шапочек и нашли, что они совпадают с кривыми поглощения медных шапочек, образующихся при электролизе и диффузии меди в каменную соль. Мы также как и Рексер зажимали во время опытов соль в латунные станочки. Очевидно медь при высокой температуре испарялась, садилась на поверхность кристалла и диффундировала в него.

5. Темперирование кристаллов. Если темперировать (отжигать) несколько часов кристалл каменной соли, при температуре около 750° и выше, то при последующей окраске под током в ней образуется рубиново-красная окраска, устойчивая при высоких температурах и неподвижная в электрическом поле. Подобные кристаллы были получены и промерены Рексером (2), а затем и в нашей лаборатории. Их кривые поглощения тождественны с кривыми поглощения красных шапочек, описанных выше. Таким образом, это изменение окраски, которое Рексер приписывал действию высоких температур, на самом деле не имеет ничего общего с темперированием и должно быть приписано диффузии меди.

Если отжигать кристалл в тигле, засыпав его толченой солью, то такой кристалл при последующей окраске ведет себя совершенно как обычный нетемперированный. Кристалл, отжигавшийся вместе с предыдущим в открытом тигле, при окраске становился бледно-красным. Наконец кристалл, темперированный в закрытом тигле вместе с кусочком меди, окрашивается затем в почти непрозрачный вишнево-красный цвет.

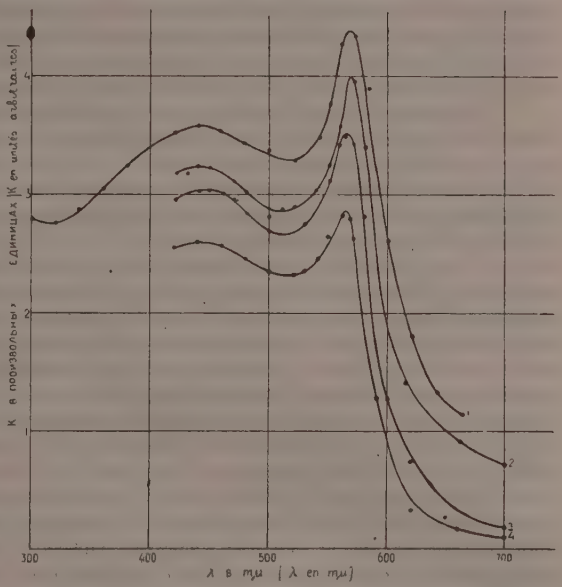
6. Природа красной окраски. В предыдущем сообщении (3) мы упоминали о красных шапочках, образующихся в каменной соли, и высказали предположение, что они представляют собой смесь атомарного натрия и мельчайшего натрового коллоида, образовавшегося в тех местах, где решетка деформировалась прошедшими через нее инородными ионами. Это предположение оказалось неверным. Уже тогда М. В. Савостьянова обратила наше внимание на то обстоятельство, что красная шапочка образуется также в кристаллах KCl. Между тем поглощение коллоидов калия в KCl должно лежать в инфракрасной области.

С другой стороны, спектроскопические исследования показали, что при электролизе каменной соли с анодами из серебра, железа и никкеля в соли оказалось изрядное количество меди, которая и вызвала образование типичных медных шапочек.

Измерения, произведенные вновь с помощью фотоэлектрического фотометрирования, дают для всех измеренных в NaCl шапочек два максимума около 440 $m\mu$ и между 565 и 575 $m\mu$. По нашей просьбе О. Ф. Павлова вычислила по теории Ми кривые поглощения для системы NaCl — мельчайший коллоид меди. Оказалось, что теоретическая кривая имеет максимумы поглощения при 440 $m\mu$ и 570 $m\mu$. Эта кривая, а также кривая поглощения различных красных шапочек, приведены на рисунке. Ультрамикроскопические наблюдения красной соли показывают, что в некоторых образцах имеется конус Тиндаля. Таким образом вся сумма фактов показывает, что красная окраска вызвана мельчайшим коллоидом.

меди. Повидимому ионы меди, встречаясь при окраске соли с электронами, нейтрализуются и выпадают в виде коллоида.

Весьма вероятно, что тот же самый процесс коагуляции происходит и в кристаллах, в которые медь проникала путем диффузии. Повидимому и здесь в кристалл проникают ионы меди, замещая ионы натрия в решетке.



В ближайшее время мы надеемся опубликовать окончательные результаты, описанных выше опытов, а также опытов с другими металлами, помимо меди.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить глубокую благодарность за многие ценные советы и помощь при работе М. В. Савостьяновой и А. Н. Филиппову (Спектроскопический сектор ГОИ), а также О. Ф. Павловой за вычисление теоретической кривой поглощения медного коллоида.

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова.
Ленинград.

Поступило
20 V 1934.

PHYSIK

EINDRINGEN VON KUPFER IN STEINSALZ MITTELS ELEKTROLYSE UND DIFFUSION

Von S. ARCYBYŠEV

(*Vorgelegt von S. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 20. V. 1934*)

1. Nachweismethoden für Kupfer. Als ein sehr empfindlicher Indikator zum Nachweisen von Kupfer in Steinsalz dient Farbveränderung von additiv-verfärbtem Steinsalz. So wird ein Stück reines Steinsalz, wenn in flüssiges Natrium bei einer Temperatur von ca. 700° getaucht, nach Verstreichen einer gewissen Zeitspanne blaugrau gefärbt (kolloidale Verfär-

bung). Der kupferhaltige Teil des Salzes, dagegen, wird schmutzigrot, fast undurchsichtig.

Bei additiver Verfärbung des Salzes durch den elektrischen Strom scheidet sich an der Grenze der kupferhaltigen Zone ein standfestes grellrotes Käppchen aus, welches weder durch Erhitzung noch durch Einwirkung eines elektrischen Feldes sich zerstören lässt. Auf solche Weise können winzige Beimengungen von Cu festgestellt werden.

Ausserdem kann Vorhandensein von Kupfer ebensogut wie von anderen Verunreinigungen sich leicht durch starkes Phosphoreszieren der verunreinigten Gebiete kundgeben.

Neben diesen speziellen Verfahren leistet selbstverständlich die gewöhnliche chemische Analyse und ganz besonders die spektroskopische Prüfung die besten Dienste.

2. Thermische Diffusion. Wenn ein Steinsalzkristall in einem speziellen Pressgestelle zwischen zwei Kupferplättchen eingeklemmt und mehrere Stunden lang einer hohen Temperatur ausgesetzt wird, so lässt sich im Salze Kupfer spektroskopisch nachweisen. Besonders gut eignet sich aber dazu das im vorhergehenden Paragraphen an zweiter Stelle besprochene Verfahren, welches uns erlaubt, die Tiefe des Eindringens von Kupfer in das Steinsalz mit grosser Genauigkeit zu bestimmen. Dabei ergibt sich für die Diffusion des Kupfers eine grosse Geschwindigkeit; so dringt Cu bei einer Temperatur von ca. 760° binnen 3 Stunden bis zu einer Tiefe von 4 mm vor. In ähnlichen Verhältnissen findet eine solche Diffusion bei anderen Metallen entweder überhaupt nicht oder mit äusserster Langsamkeit statt. Vielleicht gewährt für die ausnehmend grosse Diffusionsgeschwindigkeit des Cu der Umstand eine plausible Erklärung, dass die Ionenradien von Cu und Na nach Goldschmidt nahezu gleichgross sind: 97 bezw. 98.

3. Elektrolyse der Kupfers. Bei Verfärbung von Steinsalz durch den elektrischen Strom tritt das Käppchen in unmittelbarer Nähe der Kupferanod auf. Wenn vor der Verfärbung bei hoher Temperatur ein elektrischer Strom gelassen wird, so bildet sich bei nachfolgender Verfärbung das „Käppchen“ auf einer erheblichen Distanz von der Anode. Diese Distanz ist dem Zeitintervall während dessen der elektrische Strom durch den Kristall lief, sowie der aufgewandten Spannung direkt proportional. Das Käppchen entsteht auf der Grenze der von den Kupferionen im Kristall besetzten Zone, wo dessen Bildung durch die aus dem metallischen Natrium im Verfärbungsprozess austretenden Elektronen hervorgerufen wird.

Im verfärbten Kristalle können die Elektronen bekanntlich auf den beiden energetischen Niveaus *F* und *U* sich verteilen. Die Bindungsenergie der *F*-Elektronen beträgt ca. 2. 5 V. Diejenige der *U*-Elektronen beträgt ca. 6. 4 V. Sie rufen die Absorption im Ultraviolett hervor. Es war interessant aufzuklären, welche Elektronen die Entstehung des roten Käppchens hervorrufen. Zu diesem Behuf wurde folgender Versuch angestellt: anfänglich wurde der Kristall im elektrischen Strom bis zu einem bestimmten Merkzeichen verfärbt, um darauf durch Umkehrung der Stromrichtung wieder entfärbt zu werden. Nach solcher Behandlung wird der Kristall aufs neue vollkommen durchsichtig, da die in seinem Innern die Absorption des sichtbaren Lichtes verursachenden *F*-Zentren durch den Strom entfernt wurden. Die *U*-Zentren, hingegen, erfahren im elektrischen Felde keine Ortsveränderung, sondern verbleiben an ihren Entstehungsorten.

Nach dieser Behandlung wurde der Teil des Kristalls, wo das metallische Natrium eingelegt war, abgespaltet, der Kristall zwischen Kupferelektroden eingezwängt und darauf wiederum ein elektrischer Strom bei hoher Temperatur durchgelassen. Nach einiger Zeit bildete sich dem Merkzeichen gegenüber, an der Grenze des von den *U*-Elektronen besetzten Gebiets, ein typisches rotes Käppchen. So war denn der Beweis erbracht, dass die *U*-Elektronen ebenfalls eine wesentliche Rolle bei der Bildung des roten Käppchens spielen.

Analoge Versuche wurde mit Elektroden aus anderen Metallen angestellt, ohne jedoch bisher bestimmte Resultate zu liefern.

4. Rote Käppchen im additiv verfärbten Salze. Diese Käppchen bilden sich bei der üblichen additiven Verfärbung ohne Mitwirkung des elektrischen Stromes, dort wo die Färbung nahe an die Kristalloberfläche herantritt. Erstmalig wurden sie eingehend von Rexer [1] beschrieben, wobei ihr eigentliches Wesen vollkommen rätselhaft blieb. Wir führten Messungen der Absorptionskurven dieser Käppchen aus und fanden sie übereinstimmend mit denjenigen der bei Elektrolyse und Diffusion von Cu in Steinsalz sich bildenden Käppchen. Wir klemmten in der gleichen Weise, wie E. Rexer, in unseren Versuchen das Salz in Messinggestelle. Augenscheinlich verflüchtigte sich das Kupfer bei der hohen Temperatur, setzte sich auf der Oberfläche des Kristalls ab und diffundierte in dessen Inneres.

5. Temperieren von Kristallen. Wenn man einen Steinsalzkristall mehrere Stunden lang temperiert, bei einer Temperatur von ca. 750° und darüber hinaus, so bildet sich darin bei nachfolgender Verfärbung durch den Strom eine rubinrote färbung, standfest bei hohen Temperaturen und im elektrischen Felde unbeweglich. Solche Kristalle wurden von E. Rexer [2] erhalten und abgemessen und desgleichen auch in unserem Laboratorium. Deren Absorptionskurven sind mit denjenigen der obengeschilderten roten Käppchen identisch. So hat denn diese Verfärbung, welche Rexer der Wirkung hoher Temperaturen zuschrieb, tatsächlich mit dem Temperieren nichts gemein und ist der Diffusion des Kupfers zuzuschreiben.

Wenn ein in gepulvertes Salz eingelegter Kristall im Tiegel temperiert wird, so verhält er sich bei nachfolgender Verfärbung ganz und gar wie ein gewöhnlicher nicht temperierter. Ein zugleich mit dem vorhergehenden in offenem Tiegel abgehitzter Kristall wird bei der Verfärbung blassrot. Ein Kristall, endlich, welcher in geschlossenem Tiegel zusammen mit einem Stück Kupfer abgehitzt wurde, verfärbt sich darauf in fast undurchsichtiges Kirschrot.

6. Die Natur der roten Färbung. In einer vorhergehenden Mitteilung [3] erwähnten wir im Steinsalz sich bildende rote Käppchen und äusserten die Vermutung, sie beständen aus einem Gemisch von atomar verteiltem Natrium und von kleinstem Natriumkolloid, welches sich an den Stellen bildete, wo das Gitter infolge des Durchgangs von fremden Ionen deformiert wurde. Diese Annahme erwies sich als irrtümlich. Damals schon lenkte M. Savostjanova unsere Aufmerksamkeit auf die Tatsache, dass das rote Käppchen sich auch in Kristallen von KCl bildet. Die K-kolloide aber geben Absorptionsmaxima im ultraroten. Andererseits zeigten uns spektroskopische Untersuchungen, dass bei Elektrolysieren von Steinsalz mit Silber-, Eisen- und Nickelanoden im Salz ein erhebliches Quantum von Kupfer sich erwies, welches die Bildung von typischen Kupfer-Käppchen hervorrief.

Neuangestellte Messungen (photoelektrisches Photometrieren) ergeben uns für alle in NaCl geprüften Käppchen zwei Maxima um 440 mμ und

zwischen 565 und 575 mμ. Auf unsere Bitte berechnete O. Pavlova nach der Theorie von Mie die Absorptionskurven für das System NaCl — feinstes Kupferkolloid. Es erwies sich, dass die theoretische Kurve Absorptionsmaxima bei 440 und bei 570 besitzt. Diese Kurve sowie Absorptionskurven verschiedener roter Käppchen sind auf unserer Abbildung angegeben. Ultramikroskopische Beobachtungen des roten Steinsalzes ergeben in einigen Exemplaren einen ausgesprochenen Tyndallkegel. So weist das ganze Tatsachenmaterial darauf hin, dass die Käppchen aus kolloidalem Kupfer bestehen. Die Kupferionen, welche bei Verfärbung des Salzes mit Elektronen zusammentreffen, neutralisieren sich und schlagen sich in kolloidalem Zustande nieder.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass derselbe Koagulationsprozess auch in den Kristallen stattfindet, in welche das Kupfer durch Diffusion eingeführt wurde. Hier auch dringen allem Anschein nach Kupferionen in den Kristall, die Natriumionen im Gitter ersetzend.

In nächster Zeit gedenken wir endgültige Ergebnisse obiger Versuche sowie von Versuchen mit anderen Metallen zu veröffentlichen.

Zum Schluss ist es uns eine angenehme Pflicht, M. Savostjanova und A. Filippov (spektroskopischen Abteilung des staatlice optischen Instituts) für wertvolle Ratschläge und Mitwirkung an der Arbeit, sowie O. Pavlova für die Berechnung der Absorptionskurve des Kupferkolloids unseren aufrichtigen Dank auszusprechen.

W. Stekloffsches Physikalisch-Mathematisches Institut der Akademie der Wissenschaften. Leningrad.

Eingegangen d. 20. V. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] E. Rexer. Z. für Physik, 70, 150, 1934. [2] E. Rexer. Z. für Physik, 86, 1, 1933. [3] С. А. Арцыбышев и А. С. Топорец. ДАН. 1934, т. I, № 4, стр 176. S. Arcybyšev и A. Toporec. C. R. de l'Acad. d. Sci de l'URSS, v. I, № 4, p. 177.

ФИЗИКА

Б. Г. ШПАКОВСКИЙ

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В УГЛЕКИСЛОМ ГАЗЕ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 4 V 1934)

Вопрос о скорости распространения звуковых волн в сжатом газе и вблизи критического состояния является частью общего вопроса об изучении адиабатных свойств вещества, находящегося под повышенным давлением. Со скоростью распространения звука тесно связано отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме. Вычисляемое с помощью этих величин значение теплоемкости при постоянном объеме характеризует молекулу среды в отношении числа степеней свободы.

В этом направлении имеется весьма ограниченное количество работ. Наиболее обстоятельной можно считать исследование П. Коха [1] над скоростью распространения звука в воздухе при температурах 0 и —78.5° С

и различных давлениях до 200 атмосфер, выполненное методом пыльных фигур Кундта. Кох обнаружил изменение скорости распространения звука в зависимости от давления, особенно значительное при низкой температуре, и сильное возрастание величины k — отношения теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме — доходяще до 2.5. Причина этого возрастания была оставлена автором без объяснения. Обычный гидродинамический вывод скорости распространения звука, основанный на уравнении состояния идеального газа, должен быть видоизменен при теоретическом исследовании вопроса о скорости распространения звука в газе, сжатом и находящемся вблизи критического состояния, так как в этих областях поведение газа уже не подчиняется уравнению состояния Клапейрона. Для того чтобы получить представление, в общих чертах, о зависимости скорости распространения звука в газе от давления при разных температурах, было применено уравнение состояния фан дер Ваальса. Подобная попытка была уже предпринята Фридманом и Альтбергом (2), однако ими допущены существенные ошибки в двух исходных уравнениях. Кроме того, проделанный ими анализ является далеко не полным и не исчерпывает всех деталей процесса. На основе уравнения состояния фан дер Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \qquad [1]$$

и дифференциального уравнения для адиабатного процесса в общем виде

$$C_v d\,T + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv = 0 \qquad [2]$$

была получена следующая формула для скорости распространения звука в фан-дер-ваальсовском газе

$$W^2 = \frac{kRT}{\left(1 - \frac{b}{v}\right)^2} - \frac{2a}{v}. \qquad [3]$$

Переходя к приведенным значениям температуры (ϑ) и объема (φ), получим:

$$W^2 = \frac{8ak}{3b}\left[\frac{\vartheta}{\left(3 - \frac{1}{\varphi}\right)^2} - \frac{1}{4k\varphi}\right]. \qquad [4]$$

Здесь k — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме. Из анализа последней формулы следует, что функция W^2 монотонно возрастает при температурах бо́льших $\frac{27}{8k}$, имеет минимум при температурах меньших $\frac{27}{8k}$, обращается в 0 при $\vartheta = \frac{1}{k}$ и получает отрицательные значения при температурах меньших $\frac{1}{k}$. Полученные результаты весьма сильно отличаются от скорости распространения звука в идеальном газе. Вышеприведенный анализ не может быть полностью применим к реальным газам, так как уравнение фан дер Ваальса является только более близким приближением к истинному поведению реальных газов, чем уравнение Клапейрона, но не выражает их уравнения состояния в достаточной степени количественно точно. Однако, в тех участках, где поведение реального газа может быть количественно точно описано с помощью уравнения фан дер Ваальса, скорость распространения звука в таком газе должна выражаться вышевыведенными формулами и отли-

чаться вышеотмеченными особенностями, причем это согласие между вычисленными и фактически наблюдающимися значениями должно быть тем ближе, чем точнее подчиняется реальный газ уравнению состояния фан дер Ваальса.

Вопрос о скорости распространения звука в газе в тех областях температуры и давления, при которых происходит переход от газообразной фазы к жидкой и в которых наиболее резко проявляются отклонения уравнения состояния от идеального, принадлежит к числу весьма мало исследованных.

Для измерения скорости распространения звука был взят за основу метод Квинке [3], соответствующим образом приспособленный для измерений в газе, находящемся под большим давлением. Настройка в резонанс столба газа, заключенного в цилиндрической трубе и возбуждаемого звуком постоянной частоты, при передвижении поршня делается все менее и менее острой при увеличении давления газа, вследствие увеличения затухания, вызванного уменьшающейся разницей в акустической жесткости газа и трубы. Для повышения точности в определении местоположения узла стоячей волны был применен, вместо слухового, новый объективный метод, основанный на изучении поведения и работы микрофона. В цепи микрофона, состоящей из микрофона, гальванометра постоянного тока и катушки самоиндукции, слабо связанной с колебательным контуром генератора, служившего для возбуждения телефона, наводился переменный ток той же частоты, что и ток в телефоне. При звучании телефона в трубе, на другом конце которой помещался микрофон, мембрана последнего приходила в вынужденные колебания, вследствие чего получалось некоторое детектирующее действие на переменный ток, и гальванометр постоянного тока давал отклонение, величина которого зависела от силы звука, приводящего эту мембрану в колебания, а направление зависело от разности фаз между колебаниями мембраны и переменным током. На основе некоторых предположений относительно зависимости между амплитудой колебаний мембраны и энергией падающей на нее звуковой волны, была выведена следующая формула для силы постоянного тока в цепи микрофона

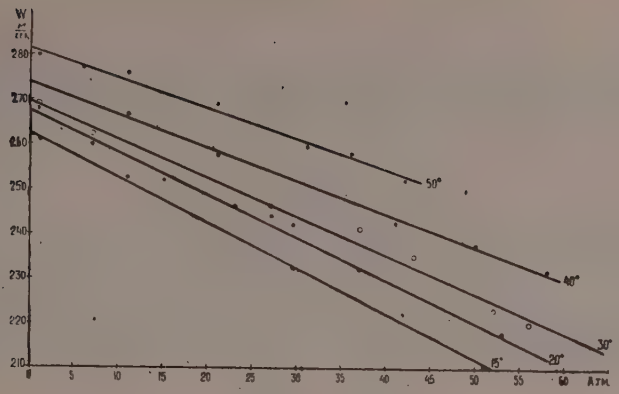
$$I = d\,\frac{E_0\, r \cos\alpha}{2R^2}, \qquad [5]$$

где E_0 — амплитуда электродвижущей сети, d — коэффициент пропорциональности, r — амплитуда колебаний мембраны микрофона, R — сопротивление микрофона в спокойном состоянии, α — разность фаз.

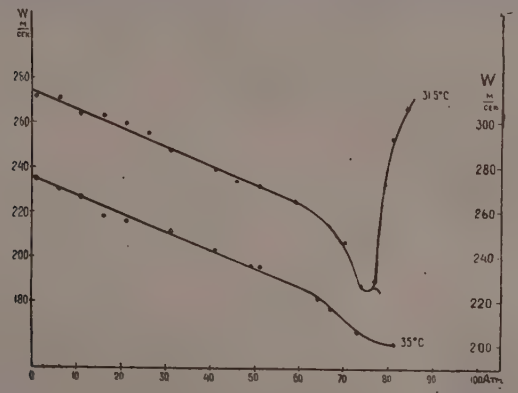
Была измерена скорость распространения звука в углекислом газе при температурах 15, 20, 30, 31.5, 35, 40 и 50° и различных давлениях от 1 до 85 атмосфер. Результаты измерений представлены на фиг. 1. На основании этих измерений были вычислены по формуле

$$W^2 = -v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T k \qquad [6]$$

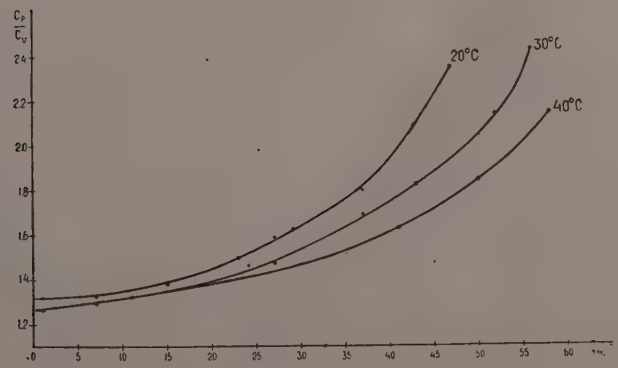
значения величины k — отношения теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме для температур 20, 30 и 40° (фиг. 2). Значения изотермического коэффициента упругости, входящего в формулу, были вычислены на основании экспериментальных определений Амага [4] pv в функции от p. Затем были вычислены значения величины C_v — моле-



Фиг. 1а. Изотермы скорости звука: 15, 20, 30, 40 и 50°.—Fig. 1a. Isotherms of the velocity of sound: 15, 20, 30, 40, and 50°.



Фиг. 1б. Изотермы скорости звука: 31.5° С (левая ордината), 35° С (правая ордината). — Fig. 1b. Isotherms of the velocity of sound: 31.5° C (left ordinate), 35° C (right ordinate).



Фиг. 2. Изотермы $\frac{C_p}{C_v}$ при 20, 30 и 40° С. — Fig. 2. Isotherms of $\frac{C_p}{C_v}$ at 20, 30, and 40° C.

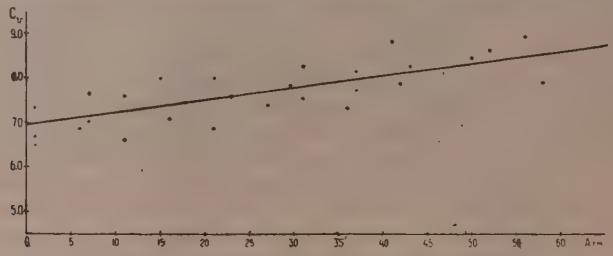
кулярной теплоемкости при постоянном объеме — по следующей легко выводимой на основании термодинамических соотношений формуле

$$C_v = \frac{T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T (k-1)}. \qquad [7]$$

Входящий в эту формулу коэффициент расширения, вследствие отсутствия непосредственных его значений, был получен косвенным путем на основании измерений Амага([4]). Значения C_v представлены на фиг. 3. Зависимость C_v от давления может быть в первом приближении представлена в виде линейной формулы:

$$C_v = C_{v1} + A(p-1). \qquad [8]$$

Значительная разбросанность точек на фиг. 3 объясняется особенностью формулы [7], вследствие которой небольшие погрешности в определении k вызывают значительные погрешности в величине C_v. Проделанный анализ показал, что относительная ошибка в определении C_v в несколько раз (4—5) больше, чем ошибка в определении k.



Фиг. 3. Зависимость C_v от давления. Fig. 3. The correlation between C_v and pressure.

Получившееся небольшое увеличение C_v от давления находится за пределами ошибок наблюдений и вычислений и должно рассматриваться как реальное. В молекулах сжатого газа не происходит выпадения ротационных степеней свободы даже в критической области, хотя предположение о выпадении ротационных степеней представляется довольно вероятным, вследствие значительного возрастания вязкости. На основании исследования Мак Леннана и Смита([5]) над Раман-эффектом в твердой и жидкой углекислоте следует считать, что молекула углекислого газа не испытывает никакого структурного изменения во всех трех аггрегатных состояниях, и потому увеличение C_v нельзя приписать ассоциации молекул, при которой новые колебательные состояния должны были бы найти свое отражение в Раман-спектре. Увеличение C_v находит свое простое и естественное объяснение в духе учения Стюарта([6]) о сиботаксической теории жидкости. Согласно этой теории жидкость следует рассматривать как систему, состоящую из молекул, временно организованных в особые, названные им сиботаксическими группы, являющиеся миниатюрными псевдокристаллами. Эти непрочные псевдокристаллы находятся в непрерывном состоянии образования и распада. При повышении температуры происходит уменьшение числа молекул, организован-

ных в сиботаксические группы. Распространяя эти представления, можно высказать вполне вероятное предположение, что сиботаксические группы начинают возникать и в газе, взаимодействие молекул которого достигло некоторой величины, то есть при достаточно сильном сжатии, а экспериментально полученное возрастание величины C_v при увеличении давления делает это предположение вполне обоснованным.

В заключение выражаю свою глубокую благодарность профессору Т. П. Кравцу за предложенную тему и руководство при выполнении этой работы и академику С. И. Вавилову за ценные указания и советы при обработке полученных результатов.

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова
Ленинград.

Поступило
25 IV 1934.

PHYSICS

THE VELOCITY OF PROPAGATION OF SOUND IN CARBON DIOXIDE NEAR THE CRITICAL STATE

By V. ŠPAKOVSKIJ

(*Communicated by S. Wawilow, Member of the Academy, 4. V. 1934*)

The problem of the velocity of propagation of sound waves in a compressed gas near the critical state is part of the general problem of investigating the adiabatic properties of a substance subjected to high pressure. The ratio of the thermal capacities at constant pressure and constant volume is closely bound up with the velocity of propagation of sound. The value of the thermal capacities at constant volume calculated with the aid of these magnitudes characterizes a molecule of the medium in regard to the number of degrees of freedom.

There is an extremely limited amount of work in this direction. The most detailed work is the investigatiou by P. Koch (1) of the velocity of propagation of sound in the air at temperatures of 0 and — 78.5° C and under various pressures up to 200 atmospheres, performed by the method of Kundt's dust figures. Koch discovered a variation in the velocity of propagation of sound, according to pressure, which is particularly marked at low temperature, and an increase in the quantity k — the ratio of the thermal capacities at constant pressure and constant volume — reaching as high as 2.5. The cause of this increase was left by the author without explanation. The usual hydrodynamic deduction of the velocity of propagation of sound, based on the equation of state of an ideal gas, has to be altered when making a theoretical investigation of the problem of the velocity of propagation of sound in a compressed gas near the critical state, since in these regions the behaviour of the gas no longer obeys Clapeyron's equation of state. In order to get an idea, in general outlines, of the dependence of the velocity of propagation of sound in a gas upon the pressure at various temperatures, van der Waals's equation of state was applied. A similar attempt has already been made by Friedmann and Altberg (2); however, fundamental errors were introduced by them in two initial equations. Besides this, their analysis is far from complete and does not exhaust all the details of the process. On the basis of van der Waals's equation of state

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \qquad [1]$$

and the differential equation for the adiabatic process in the general form

$$C_v\,dT + T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v dv = 0, \qquad [2]$$

the following formula for the velocity of propagation of sound in a van der Waalsian gas was obtained:

$$W^2 = \frac{k\,RT}{\left(1-\frac{b}{v}\right)^2} - \frac{2a}{v}. \qquad [3]$$

Passing on to the indicated values for the temperature (ϑ) and the volume (φ), we get

$$W^2 = \frac{8ak}{3b}\left[\frac{\vartheta}{\left(3-\frac{1}{\varphi}\right)^2} - \frac{1}{4k\varphi}\right]. \qquad [4]$$

Here k is the ratio of the thermal capacities at constant pressure and volume. From an analysis of the last formula it follows that the function W^2 increases uniformly at temperatures greater than $\frac{22}{8k}$, has a minimum at temperatures less than $\frac{27}{8k}$, becomes 0 at $\vartheta = \frac{1}{k}$, and acquires a negative value at temperatures below $\frac{1}{k}$. The results obtained widely depart from the velocity of propagation of sound in an ideal gas. The above analysis cannot be applied in full to real gases, since van der Waals's equation is only a closer approxmation to the true behaviour of real gases than Clapeyron's equation, but it does not express their equation of state with sufficient quantitative exactness. In those regions, however, in which the behaviour of a real gas can be described with quantitative exactness by means of van der Waals's equation, the velocity of propagation of sound in such a gas should be expressed by the formulae deduced above and should be distinguished by the above noted peculiarities, while this agreement between the calculated and actually observed values should be the closer, the more nearly the real gas obeys van der Waals's equation of state.

The problem of the velocity of propagation of sound in a gas in those regions of temperature and pressure in which the transition of the gas from the gaseous to the liquid phase takes place and in which the deviations of the equation of state from the ideal are most sharply manifested, belongs to the number of extremely little investigated problems.

For measuring the velocity of propagation of sound Quincke's [3] method was taken as a basis, adapted for measurements in a gas subjected to high pressure. The tuning into resonance of the column of gas, enclosed in a cylindrical tube and excited by a sound of constant frequency, upon moving the piston becomes less and less sharp, as she pressure of the gas increases, in consequence of the increased damping effect produced by the diminshing difference in the acoustic rigidities of the gas and the tube. For greater accuracy in determining the position of the node of the stationary wave, instead of the auditory method, a new objective method, based on the study of the behaviour and work of the microphone, was used. An alternating current of the same frequency as the current in the telephone was induced in the circuit of the microphone consisting of the microphone, a direct current galvanometer, and a self-induction coil loosely connected

with the oscillating circuit of the generator serving to excite the telephone. At the sounding of the telephone in the tube, at the other end of which was located the microphone, the diaphragm of the latter was brought into forced vibration, in consequence of which a certain amount of detecting action on the alternating current resulted, and the direct current galvanometer gave a deflexion, whose magnitude depended on the strength of the sound bringing the diaphragm into vibration and whose direction depended on the difference of phase between the vibrations of the diaphragm and the alternating current. On the basis of a number of assumptions regarding the dependency between the amplitude of the vibrations of the diaphragm and the energy of the sound wave falling on it, the following formula for the strength of the direct current in the circuit of the microphone was deduced:

$$I = d\frac{E_0\, r\, \cos\alpha}{2R^2}, \qquad [5]$$

where E_0 is the amplitude of the electromotive force, d — the coeffiici ent of proportionality. r — the amplitude of the vibrations of the microphone diaphragm, R — the resistance of the microphone in the quiet state, and α — the difference of phase.

The velocity of propagation of sound in carbon dioxide gas at temperatures of 15, 20, 30, 31.5, 35, 40, and 50° and at various psessures from 1 to 85 atmospheres was measured. The results of the measurements are represented in fig. 1 (p. 29). On the basis of these measurements the values of the magnitude k — the ratio of the thermal capacities at constant pressure and volume — for temperatures of 20, 30, and 40° were calculated (fig. 2, p. 29) according to the formula

$$W^2 = -v^2\left(\frac{dp}{dv}\right)_T k. \qquad [6]$$

The values of the isothermal coefficient of elasticity entering into the formula were calculated on the basis of Amagat's experimental determinations of pv as a function of p. After this, the values of the quantity C_v — the molecular thermal capacity at constant volume — were calculated according to the following formula which is easily deduced on the basis of the thermodynamic relations:

$$C_v = \frac{T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p^2}{\left(\frac{dp}{dv}\right)_T(k-1)}. \qquad [7]$$

The coefficient of expansion entering into this formula for lack of its immediate values was obtained indirectly on the basis of Amagat's ([4]) measurements. The values of the C_v are represented in fig. 3 (p. 30). The dependence of C_v on the pressure can be represented, as a first approximation, by the linear expression:

$$C_v = C_{v1} + A(p-1). \qquad [8]$$

The considerable sparseness of the points on fig. 3 is explained by the peculiarity of formula [7], in consequence of which small errors in determining k call forth considerable errors in the quantity C_v. The analysis performed showed that the relative error in the determination of C_v is several (4—5) times greater than the error in the determination of k.

The small increase in C_v resulting from the pressure is beyond the limits of error of the observations and calculations and should be regarded as real.

No falling out of rotational degrees of freedom takes place in the molecules of a compressed gas even in the critical region, although the falling out of rotational degrees of freedom seems fairly probable, as a result of the considerable increase in viscosity. On the basis of the investigation by Mc Lennan and Smith (5) of the Raman effect in solid and liquid carbon dioxide, it is necessary to assume that the molecule of carbon dioxide gas does not experience any structural change in any of the three aggregate states, and, therefore, the increase in C_v cannot be ascribed to the association of the molecules, in the event of which new vibratory states should find their reflection in the Raman spectrum. The increase in C_v finds its simple and natural explanation in the spirit of Stewart's (6) doctrine concerning the sibotactic theory of liquids. According to this theory, liquids should be regarded as a system consisting of molecules arranged in special temporal groups, called sibotactic by him, which are miniature pseudocrystals. These unstable pseudocrystals are in a continual state of formation and dissolution. Upon a rise in temperature a decrease in the number of molecules organized in sibotactic groups occurs. Expanding these conceptions one may state the entirely probable supposition that sibotactic groups begin to form also in gas in which the interaction of the molecules has reached a certain magnitude, that is, under sufficiently high pressure, while the experimentally obtained increase of the quantity C_v with an increase of pressure makes this supposition well founded.

In couclusion I wish to express my deep gratitude to Prof. T. Kravec for the theme suggested and guidance in performing the present work as well as to Academician S. Wawilow for valuable advice in analysing the results obtained.

V. Stekloff Physico-Mathematical
Institute of the Academy of
Sciences. Leningrad.

Received
25. IV. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] Koch. Abhandl. der Bayersch. Acad. d. Wissensch., 23, S. 377, 1909. [2] Фридман и Альтберг. Геофизический сборник, 2, вып. 3, стр. 69, 1915. Friedmann and Altberg. Geophysical symposium, 2, vol. 3, p. 69, 1915. [3] Quincke. Pogg. Ann., 198, p. 177, 1886. [4] Amagat. Ann. de Chimie et de Physique (6), 29, p. 109, 1893. [5] Mc Lennan and Smith. Can. Journ. Res., 7, p. 551, 1932. [6] Stewart. Far. Soc. Trans., 29, 1933.

ГЕОФИЗИКА

Н. Н. КУЗНЕЦОВ-УГАМСКИЙ

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ИНВЕРСИЯ И „ХОЛОДНЫЕ ВОЛНЫ" В СРЕДНЕЙ АЗИИ

(*Представлено академиком А. А. Борисяком 18 IV 1934*)

В связи с вопросом о размещении по территории Средней Азии субтропических деревьев и кустарников, чувствительных к морозам, была изучена термика холодного периода года для выяснения обстоятельств, сопровождающих сильные похолодания.

Данные срочных наблюдений метеорологических станций и синоптические карты, составленные по телеграфным данным, — материал для этой цели достаточно неблагодарный, но пришлось ограничиться им,

имея в виду в дальнейшем организовать углубленное изучение вопроса, привлекая для этой цели синоптические карты, составленные по проконтролированным данным всей сети и материалы самописцев.

Оказалось, что для многолетних растений следует предпочесть не пониженные долины юга, а в первую очередь склоны южных гор на некоторой высоте над уровнем долин и в стороне от путей прохождения ветров фенового и бризового характера. Вопрос об экспозиции надо решать особо в связи с условиями увлажнения и биологией растения: для растений с ранним началом вегетации следует предпочесть теневые склоны во избежание повреждений от возврата весенних холодов. Наиболее удобные районы: 1. Юго-западный Таджикистан и части бассейнов рек Сурхана и Ширабада в Узбекистане. В первом — низкие и высокие предгорья в бассейнах Вахша, Кизил-су, Яксу и Кафернигана. Бешкентская долина, вполне пригодная для однолетних культур (долгое, жаркое лето), для многолетников менее удобна, нежели приподнятые, пересеченные местности в районах: Куляб, Ховалинг, Бальджуан, Муминабад и др. Гиссарской долине следует предпочесть окружающие склоны. Причина в обоих случаях одна — подверженность понижений эпизодическим сильным захолоданиям. 2. Западные разветвления Копетдага и Юго-восточное побережье Каспия. Возможны захолодания до — 20° С.

Морозы до—25° возможны в периферических частях двух названных районов, в долине Вахша до Гарма, а может быть и выше, в части горных долин бассейнов Сурхана, Ширабада и Кашка-дарьи, на нижнем Зеравшане в пределах Узбекистана (исключение: Катта-курган, см. ниже) и по средней Аму-дарье ниже Чарджуя. Изолированный „теплый остров“ среди более холодных земель в западной и северо-западной Фергане.

В зимнее время температурная инверсия типична для Средней Азии. При сравнении станций, лежащих по разным уровням, но невдалеке одна от другой, она проявляется или в уменьшении градиента или даже в более высоких температурах на высоте. Инверсия не всегда маскируется даже средними месячными температурами, резче выражена в минимальных температурах и совершенно отчетлива при изучении хода температуры день за днем.

Особенно резко выражена инверсия при наиболее сильных понижениях температуры, — склоны гор оказываются теплее низменных равнин до некоторой высоты, за которой опять начинается похолодание, прогрессивно возрастающее с поднятием над уровнем моря. Это происходит обычно при вторжении на территорию Средней Азии „холодных волн“, воздушных масс арктического происхождения, движущихся с севера, внося резкие нарушения в обычный ход сезонных процессов в природе. Холодные волны могут достигать Афганистана, Персии; иногда проникают даже в Индию.

Вертикальные пределы влияния холодных волн широки: от низменных равнин до высот более 3660 м (Тяньшаньская метеорологическая обсерватория около ледника Петрова), но проявления этого влияния могут быть весьма различны. Наиболее замечательный факт: наличие сильных местных депрессий температуры внизу, на низменности с одной стороны, высоко в горах с другой. Равнины, удаленные от гор, и особенно нижние части горных склонов и предгорья никогда не охлаждаются столь сильно, оставаясь относительно теплыми и при вторжении холодных волн.

Холодная волна в декабре 1930. — Cold wave in December 1930

Станция Station	Высота над уровнем моря Elevation above sea level in metres	Температура Temperature	Дни месяца Days of the month														
			11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Мирзачуль Mirzachul	279	Средняя Mean	— 0.3	3.7	6.4	7.6	— 2.0	— 5.9	—11.5	—25.3	—25.8	—25.7	—21.5	—13.4	— 3.5	— 4.2	— 5.2
		Минимум Minimum	— 2.6	— 2.8	3.6	3.5	— 3.3	— 7.0	— 5.8	—29.4	—34.1	—34.4	—30.8	—23.4	—17.3	— 8.2	— 8.9
Ташкент Tashkent	479	Средняя Mean	1.4	5.0	6.2	7.3	0.5	— 3.7	—10.3	—16.6	—23.4	—23.0	—14.8	— 5.3	2.2	— 5.4	— 2.5
		Минимум Minimum	— 3.4	— 3.0	3.8	3.6	— 0.6	— 4.5	—12.7	—19.9	—27.4	—29.5	—23.6	—15.7	— 9.9	— 7.8	—10.2
Акташ Aktash	1137	Средняя Mean	— 1.0	5.6	3.1	4.1	2.9	— 1.3	—11.7	—17.7	—17.5	—12.9	— 6.2	2.6	6.1	— 1.7	5.7
		Минимум Minimum	— 3.0	0.8	1.5	2.2	0.9	— 4.2	—13.8	—21.2	—20.2	—17.6	— 9.6	— 2.5	2.2	1.0	2.6
Дехауз, верхн. Зеравшан Dekhaus, upper Zeravshan valley	2497	Средняя Mean	— 6.8	— 7.1	— 1.8	— 4.5	— 1.9	— 1.5	— 5.7	—11.1	—14.2	—16.6	—12.7	— 7.8	— 1.1	— 1.7	— 4.7
		Минимум Minimum	—12.0	— 7.8	— 2.6	— 8.4	— 8.0	— 4.1	— 8.0	—12.7	—17.3	—20.5	—19.3	—15.3	— 8.8	— 4.9	— 8.7
Ледник Петрова (Тянь-шань) Petrov glacier (Tian-Shan)	3660	Средняя Mean	—17.3	—25.0	—13.5	— 5.1	—13.7	—11.3	—14.2	—21.5	—22.4	—26.7	—26.9	—24.5	—18.8	—17.2	—15.7
		Минимум Minimum	—21.2	—31.5	—25.9	—19.8	—20.4	—16.8	—20.7	—23.3	—23.0	—29.8	—36.0	—33.8	—26.8	—27.3	—26.0
Сталинабад Stalinabad	819	Средняя Mean	5.0	9.1	5.7	5.9	7.8	9.0	— 3.2	— 2.5	— 3.6	— 5.6	— 5.0	— 1.4	2.5	0.3	4.1
		Минимум Minimum	— 2.5	2.5	4.2	0.7	0.9	5.2	— 4.6	— 4.5	— 6.1	— 9.1	—11.5	— 6.2	— 2.7	— 3.0	— 2.2

Станции Мирзачуль, Ташкент и Акташ находятся в одном и том же естественном районе.

Обратить внимание на различие проявлений холодной волны в разных местах, раннее наступление минимума в Акташе, позднее на леднике Петрова; резко выраженную инверсию между Мирзачулем, Ташкентом, Акташем, Дехаузом; относительно слабую и запоздалую депрессию в Сталинабаде.

Stations Mirzachul, Tashkent, and Aktash are located in the same natural region.

Note the different manifestations of cold wave in each locality, early minimum at Aktash, tardy — at Petrov glacier, strongly marked inversion between Mirzachul, Tashkent, Aktash, Dekhaus, relatively small and tardy depression of temperature at Stalinabad.

Наиболее страдают от местных похолоданий: в бассейне Зеравшана — Катта-курган, в бассейне Сыр-Дарьи — Мирзачуль, в бассейне Чу — Фрунзе.

Все эти пункты аналогично расположены в депрессиях, против устьев горных долин названных рек. Отсюда предположение, что низкие минимумы, изредка наблюдаемые здесь и связанные с холодными волнами, непосредственно зависят от двух сопутствующих явлений: 1) усиленной радиации благодаря безоблачному небу, свойственному арктическому воздуху, и 2) стоку холодного воздуха с гор.

Это предположение подтверждается явлением „обратных (встречных) волн", спускающихся со склонов и заполняющих отрицательные элементы рельефа до вторжения холодной волны с севера и северо-запада, распространяющейся „по-низу" вдоль земной поверхности.

Поэтому, минимум в Акташе наступает раньше, чем в Ташкенте, вопреки более западному положению последнего (см. таблицу, Акташ — 21.2—18 декабря; Ташкент — 29.5—20 декабря).

Поэтому же Гиссарская долина в Южном Таджикистане, заключенная среди гор, имеет более холодные зимы, чем соседние склоны и аллювиальные долины (Вахш, Кафернган) далее к югу.

Подобные „волны" отмечены в литературе (1). Гигинеишвили говорил о развитии на Кавказе при надвигании северного антициклона местного „Карсского антициклона" (2), также довод за высказанное положение.

Надо добавить, что сильное охлаждение в трех названных районах не может быть объяснено непосредственным притоком воздуха с севера: так как ни в Хорезме, ни в низовьях Сыр-дарьи температура не падает так сильно, как в Мирзачуле и Катта-кургане: ясно, что сильное захолодание — явление местного значения.

Так как массы холодного арктического воздуха движутся различными объемами, они могут захватить или всю Среднюю Азию или только часть. Поэтому сильные похолодания не совпадают во времени, а степень понижения температуры в разных районах оказывается различной. Похолодание в декабре 1930 г. в Мирзачуле вызвало падение минимальных температур на 38° (по сравнению с предшествующим моментом наибольшего потепления), в Ташкенте — 33.3°, в Акташе — 19.0°, в бассейне Зеравшана — 23°, на Кашка-дарье — 17—18°, в Сталинабаде 16.7°.

Поступило
18 IV 1934.

GEOPHYSICS

TEMPERATURE INVERSION AND 'COLD WAVES' IN MIDDLE ASIA

By N. KUZNECOV-UGAMSKIJ

(*Communicated by A. Borissiak, Member of the Academy, 18. IV. 1934*)

In order to obtain some climatological data for the purposes of a rational distribution of subtropical tree and bush crops on the territory of Middle Asia, a study of winter temperatures was made, because winter colds appear to be most injurious to the thermophilic, even when deciduous, subtropical plants.

The main results are as follows.

1. In Middle Asia there are only limited areas where the winter minima can drop below — 20° C, although such extreme frosts are very rare

The south-eastern coastal region of the Caspian Sea and the neighbouring ranges of Kopet-Dagh, on the one hand, and a part of the middle Amu-Darya basin, on the other — are the warmest areas in winter in Middle Asia.

Frosts up to — 25° are possible on the eastern coast of the Caspian Sea, Kopet-Dagh range, south-eastern part of Karakum deserts, the Amu-Darya from the lower Pjandsh down to Charjui and farther north in lower Zeravshan valley, the lower parts of the basins of the Kashka-Darya, Shirabad, Surchan-Darya, Kafernigan, Vakhsh, Kizil-su and Yakhsu, and a separate area in the northern Ferghana, on the slopes exposed to South.

2. During the winter months the strongly marked temperature inversion is typical of Middle Asia and may be seen from a comparison of stations situated at different altitudes but near to one another (see table on p. 36).

The inversion is particularly pronounced during the periods of the invasion of the so-called 'cold-waves' — the masses of extremely cold arctic air moving southward from the northern parts of Eurasian continent and from the northern seas.

The cold waves disturb the normal course of seasonal phenomena and often cause economic losses.

The cold waves may reach not only Middle Asia, but also, less often, Persia, Afghanistan, and even India.

3. The vertical limits of the influence of cold waves are very wide, from the lowest plains up to altitudes of over 3650 metres above sea level (Tian-Shan Meteorological Observatory near the Petrov glacier), but at different altitudes the manifestations of this influence may be quite different.

4. The most striking fact in this connexion is that low temperature depressions are characteristic both of high mountain plateaus and low piedmont plains. Plains widely removed from mountains and especially lower parts of mountain slopes never experience so great depressions and during the cold wave invasions remain relatively warm.

The most liable to suffer from frosts are: in the basin of Zeravshan river — Katta-Kurgan, in that of Syr-Darya — Mirzachul, in that of Chu — Frunze.

All these places are similarly located, opposite the mouths of the mountain valleys of the rivers named above. Therefore, it may be supposed that the extremely low temperatures, which are seldom observed in these places and are connected with the cold waves, stand in close connexion with two other concomitant phenomena: 1) the direct night radiation due to the cloudless weather of such periods and 2) the run-off of the cold air from the mountain ridges down to bottom lands of the valleys.

5. Such a supposition is confirmed by the phenomenon of 'opposite waves' running down from hills and slopes and filling up the negative elements of the relief before the coming of the northern cold waves spreading over the plains along the soil surface.

Therefore, the lowest minima of temperature in Aktash may be observed earlier than in Tashkent, in spite of the more western position of the latter.

Therefore, the so-called Hissar valley in Southern Tajikistan, surrounded by mountain ranges, is in winter colder than the near-by slopes and the alluvial plains situated southward of the latter.

Analogous facts have been recorded in literature ([1,2]).

In conclusion it may be stated that in Middle Asia the areas most suited for the plants suffering from winter and early spring frosts are not the bottom lands, but the hillsides and mountain slopes at an elevation, out of the the ways of cold mountain winds, especially in South-Western Tajikistan, the neighbouring part of Uzbekistan in the basins of the rivers Surkhan and Shirabad, and in western Kopet-Dagh ranges.

Received
18. IV. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] Travníček. Meteorol. Z., 1928, S.. 241—251. [2] Gigineischwili. Meteorol. Z., 1929. S. 102—109.

ХИМИЯ

В. С. САДИКОВ, А. Ф. ШОШИН, К. М. СТАРУХИНА и М. П. ЛИВШИЦ

О ПРОИСХОЖДЕНИИ СЕРОВОДОРОДА ПРИ ВАРКЕ КУРИНОГО МЯСА

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 22 V 1934*)

Куриное мясо при варке (100°) и при стерилизации (112°) образует H_2S, тогда как сырое мясо не дает реакций на H_2S при условии отсутствия в нем микрофлоры. При изготовлении куриных консервов весьма важно знать источники происхождения H_2S, имея в виду его устранение. E. Sluiter показала, что животные ткани выделяют H_2S после прибавления коллоидальной серы, которая реагирует с глутатионом следующим образом:

$$G \cdot SH + S + HS \cdot G \rightarrow G \cdot S — S \cdot G + H_2S.$$

Образование H_2S согласно Sluiter не обусловливается наличием специфических энзимов, например дегидрогеназ.

Свободная сера несомненно возникает при разложении сернистых соединений, находящихся в составе тканевых белков, как-то цистина, метионина, глутатиона и быть может гомоцистина.

В сухом, свободном от золы и жира белом курином мясе были найдены следующие количества различных форм серы до и после стерилизации, а также соответствующей варки.

Таблица 1

Содержание серы в % от сухого вещества (без золы и жира)

	Сырое мясо	Консерв (после 60-минутной стерилизации при 112°)	Мясо вареное при 100° после 25 часов варки
Общая сера	0.935	0.890	0.806
Цистиновая сера	0.454	0.439	0.327
Метиониновая сера	0.251	0.262	0.196
Глутатионовая сера	0.051	0.002	0

При варке куриного мяса образуется H_2S; глутатион исчезает нацело, цистин и метионин частично разрушаются. Потеря различных форм серы выявляется наиболее отчетливо, если отнести содержание серы к содержанию азота, принимая его за 100.

Таблица 2

Содержание серы в курином мясе, отнесенное к содержанию азота в курином мясе в %

	Общий азот	Общая сера	Цистиновая сера	Метиониновая сера	Глутатионовая сера	Сумма 3, 4 и 5	Разность 2—6
	1	2	3	4	5	6	7
Сырое мясо . . .	15.15	6.17	2.99	1.66	0.34	4.99	1.18
Консерв	16.29	5.46	2.70	1.61	0.01	4.32	1.14
Мясо после 25 ч. кипячения .	16.80	4.79	1.95	1.17	0	3.12	1.67

Куриное мясо при варке и последующей стерилизации (112°) теряет часть своей серы в виде H_2S и в виде элементарной серы. Количество свободного H_2S, образующегося при этом, составляет на 100 г белого или красного мяса 0.33 и 0.64 мг, что дает в сумме около 0.0039%, считая на сухое обезжиренное и беззольное вещество мяса. Часть H_2S несомненно адсорбирована самим мясом. Большую часть потери серы повидимому следует отнести не на образование H_2S, а на образование свободной серы.

После выщелачивания куриного фарша водою или 10% раствором поваренной соли происходит полная потеря глутатиона; такое промытое мясо не могло бы образовать H_2S, если бы это образование H_2S зависело только от реакции между серой и глутатионом. На самом деле выщелоченное мясо при варке и при стерилизации образует H_2S, также как непромытое мясо. Таким образом можно допустить, что источником H_2S является не только глутатион, но и другие сернистые комплексы белков мяса.

Так как цистин согласно Гренахеру при нагревании в автоклаве в спиртовом растворе при 175° не выделяет H_2S, а метионин является еще более прочным, чем цистин, то механизм происхождения серы и сероводорода из мяса можно объяснить только путем возникновения цистеина. В качестве промежуточных звеньев можно допустить следующие реакции:

1. Редукция цистина в цистеин при участии донатора водорода (например, янтарной кислоты):

$$\begin{array}{l} HOOC-CH-NH_2-CH_2-S \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad | \\ HOOC-CH-NH_2-CH_2-S \end{array} \quad \begin{array}{l} H \\ + \\ H \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} HOOC-CHNH_2-CH_2-SH \\ \quad\quad\quad\quad\quad\

3. Реакция между цистеином и серой с образованием H_2S и регенерацией цистина:

$$\begin{matrix} HOOC-CHNH_2-CH_2-SH \\ HOOC-CHNH_2-CH_2-SH \end{matrix} + S \rightarrow \begin{matrix} HOOC-CHNH_2-CH_2-S \\ | \\ HOOC-CHNH_2-CH_2-S \end{matrix} + H_2S$$

При взаимодействии H_2S и серина может вновь образоваться цистеин.

4. Метионин при окислении испытывает энтметилирование и превращается в гомоцистин:

$$\begin{matrix} CH_3S-CH_2-CH_2-CHNH_2-COOH \\ CH_3S-CH_2-CH_2-CHNH_2-COOH \end{matrix} \begin{matrix} HO \\ | \\ HO \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} CH_3OH \\ CH_3OH \end{matrix} \begin{matrix} S-CH_2-(CH_2)_2-\underset{|}{\overset{COOH}{\overset{|}{C}}}HNH_2 \\ S-CH_2-(CH_2)_2-CH-NH_2 \\ \quad\quad\quad\

bei Zersetzung von Schwefelverbindungen, welche sich in geweblichen Eiweissstoffen vorfinden, nämlich aus Zystin, Methionin und vielleicht Homozystin.

In der trocknen asch- und fettfreien Substanz des weissen Hühnerfleisches werden vor und nach der Sterilisation sowie dem entsprechenden Kochen folgende Mengen verschiedener Schwefelarten ermittelt:

Tabelle 1

Schwefelgehalt in % Trockensubstanz (ohne Asche und Fett)

	Rohes Fleisch	Konserviertes Fleisch 60 Minuten bei 112°	Gekochtes Fleisch 25 Stunden bei 100°
Gesamt-Schwefel	0.935	0.890	0.806
Zystin-Schwefel	0.454	0.489	0.327
Methionin-Schwefel	0.251	0.262	0.196
Glutathion-Schwefel	0.051	0.002	0

Beim Kochen des Hühnerfleisches bildet sich H_2S; Glutathion zersetzt sich vollständig, Zystin und Methionin teilweise. Der Verlust verschiedener Schwefelarten kann in dem Falle besonders deutlich gezeigt werden, wenn der Schwefelgehalt zum Stickstoffgehalt in Beziehung gestellt wird.

Tabelle 2

Schwefelgehalt in Bezug zum Stickstoffgehalt des Hühnerfleisches in %

	Gesamt-Stickstoff	Gesamt-Schwefel	Zystin Schwefel	Glutathion-Schwefel	Methionin-Schwefel	Summe von 3, 4 u. 5	Differenz 2—6
	1	2	3	4	5	6	7
Rohes Fleisch . .	15.15	6.17	2.99	0.34	1.66	4.99	1.18
Fleischkonserven .	16.29	5.46	2.70	0.01	1.61	4.32	1.14
Fleisch nach 25-stündigem Kochen	16.80	4.79	1.95	0	1.17	3.12	1.67

Bei Kochen und nachfolgendem Sterilisieren verliert das Hühnerfleisch einen Teil seines Schwefels in Form von H_2S und elementarem Schwefel. Die Menge des freien H_2S, welches sich beim Kochen evtl. beim Sterilisieren des Hühnerfleisches entwickelt, wird für je 100 g weisses oder rotes Fleisch durchschnittlich in den Grenzen von 0.33 bis 0.64 mg bestimmt, auf asch- und fettfreie Trockensubstanz berechnet, was nur 0.0039% ausmacht. Ein Teil des gebildeten H_2S wird zweifellos vom Fleisch absorbiert. In der Konserven-Bouillon wird 0.71 mg H_2S auf je 100 g Fleisch bestimmt. Der grösste Teil der Schwefelverluste muss wohl nicht der H_2S-Bildung, sondern der Schwefelbildung zugeschrieben werden.

Nach dem Auslaugen des gemahlenen Hühnerfleisches mit Wasser oder 10%-ger Kochsalzlösung verliert es sein Glutathion vollständig und sollte kein H_2S bilden, wenn die H_2S-Bildung nur von der Reaktion zwischen freiem Schwefel und Glutathion, wie oben erwähnt, abhängig wäre. Tatsächlich entwickelt das ausgelaugte Fleisch beim Kochen und Sterilisieren reichlich H_2S; dadurch wird die Voraussetzung von E. Sluiter widerlegt.

Da, nach Grenacher, das Zystin bei Erwärmen mit Alkohol im Autoklaven auf 175° kein H_2S abgibt uud Methionin als noch beständiger betrachtet werden muss, kann der Mechanismus der Schwefel- und Schwefelwasserstoffbildung nur durch Entstehen von Zystein erklärt werden.

Folgende Reaktionen kann man als Zwischenstufen ansehen:

1. Reduktion des Zystins zu Zystein unter Teilnahme von Wasserstoff-Donatoren (z. B. Bernsteinsäure):

$$\begin{array}{lcl} Z-S & H & Z-SH \\ | & + | & \rightarrow \\ Z-S & H & Z-SH \end{array}$$

2. Oxydation des Zystins unter Bildung von freiem Schwefel und Serin:

$$\begin{array}{lcl} Z-S & HO & Z-OH \quad S \\ | & + | & \rightarrow \quad + \; \| \\ Z-S & HO & Z-OH \quad S \end{array}$$

3. Reaktion zwischen Zystein und freiem Schwefel unter H_2S-Bildung und Zystin-Regeneration:

$$\begin{array}{lcl} Z-SH & & Z-S \\ & +S\rightarrow & | \quad +H_2S \\ Z-SH & & Z-S \end{array}$$

Aus H_2S und Serin kann sich Zystein auf's neue bilden.

4. Methionin kann durch Oxydation entmethyliert werden und verwandelt sich in Homozystin

$$\begin{array}{lcl} Z'-S\,CH_3 & HO & Z'-S \quad CH_3OH \\ + & | & \rightarrow \quad | \quad + \\ Z'-S\,CH_3 & HO & Z'-S \quad CH_3OH \end{array}$$

Alle unsere Versuche sind unter strengster bakteriologischer Kontrolle ausgeführt, wobei jegliche Möglichkeit einer bakteriellen Bildung von H_2S ausgeschlossen wurde. Die bakterielle Zersetzung der Eiweissstoffe wird durch gleichzeitige Bildung von H_2S und NH_3 gekennzeichnet. In allen unseren Fällen fehlt NH_3 gänzlich.

Laboratorium für Eiweisschemie
des Instituts für Nahrungsmittelindustrie.
Leningrad.

Eingegangen
d. 22. V. 1934.

БИОЛОГИЯ

Н. В. БРОМЛЕЙ И В. Н. ОРЕХОВИЧ

О ПРОТЕОЛИЗЕ В РЕГЕНЕРИРУЮЩИХ ТКАНЯХ

АУТОЛИЗ НОРМАЛЬНЫХ И РЕГЕНЕРИРУЮЩИХ ТКАНЕЙ

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 2 IV 1934*)

Продукты белкового распада, по данным ряда исследователей, в частности школы Карреля ([1]), имеют большое значение для роста тканей. Весьма вероятно, что наличие этих продуктов может иметь немаловажное значение также и для роста при регенерации. Интенсивный распад в тканях остатка ампутированного органа точно установлен некоторыми авторами гистологически и подтвержден нами в предыдущей работе „Гистолизирующие свойства регенерационной бластемы" (ДАН, 1934, т. I, № 4), химически и гистохимически. В той же работе нами было показано, что усиленный распад, наблюдаемый в тканях остатка органа, связан как с травматизацией, так и с наличием регенерационной бластемы (в большой степени).

Поэтому вполне законно поставить вопрос о том, какие изменения в условиях тканевого протеолиза, ведущие к увеличению интенсивности белкового распада в тканях ампутированного органа, возникают с образованием бластемы.

Имеет ли в данном случае место увеличение концентрации протеолитических ферментов в тканях регенерата или же дело в благоприятных изменениях условий ферментативной реакции?

В силу каких обстоятельств увеличение интенсивности белкового распада имеет место в тканях остатка ампутированного органа (подлежащей ткани) и не наблюдается в регенерационной бластеме?

Литературных данных по этому вопросу нет. Кое-что в этом направлении сделано по злокачественному росту, который по мнению ряда авторов ([2]) чрезвычайно сходен и тесно связан с регенерацией. Относясь с осторожностью к точке зрения этих авторов, мы считаем все же небезинтересным привести коротко те основные выводы, которые можно сделать на основании имеющихся работ по вопросу о протеолизе злокачественных образований.

Интенсивность протеолиза злокачественных опухолей несколько увеличивается по сравнению со стационарными тканями, из которых эти опухоли возникают. (Однако активность протеолитических ферментов злокачественных опухолей не превышает активности этих же ферментов таких органов как почки, селезенка и др. в их нормальном состоянии.)

Качественно протеолитические ферменты злокачественных образований по данным Кребса, Клейнманна и Верра ([3]) вполне идентичны с ферментами нормальных (стационарных) тканей. Следовательно изменения в интенсивности протеолиза, связанные с возникновением злокачественных образований, обусловлены или увеличением количества вырабатываемых протеолитических ферментов или же изменением условий ферментативной реакции.

Можно предположить, что наблюдаемый при регенерации интенсивный белковый распад в тканях остатка органа также связан с изменениями или количества фермента или условий их деятельности.

В целях проверки этого предположения был предпринят ряд исследований, результаты которых частично изложены в данной работе.

В качестве подопытного материала были использованы головастики *Pelobates fuscus*. У них ампутировался хвост, и спустя 5—6 дней исследовалась ткань образовавшейся регенерационной бластемы и ткани участков органа, прилежащие к регенерату (подлежащая ткань). Одновременно исследовались также и нормальные (стационарные) ткани.

Интенсивность аутолиза определялась по разности величин остаточного азота, неосаждаемого трихлоруксусной кислотой, в начале и конце опыта. Остаточный азот определялся по микрометоду Кьельдаля в модификации Банга. *p*H соответствовал тем величинам, которые характерны для данной ткани в процессе ее жизнедеятельности по данным Окунева (4). Кроме того переваривание нормальной ткани велось при *p*H характерном для бластемы.

Количество продуктов распада белка определялось в следующие моменты: 1) до аутолиза, 2) через четыре часа после начала аутолиза, 3) через 12 часов после начала аутолиза.

Полученные данные сведены в приводимых ниже таблицах.

Серия 1. Остаточный азот до аутолиза (в мг %)

a) Нормальная ткань	b) Бластемы	c) Ткань остатка ампутированного органа (подлежащая ткань)
90.0 110.0	62.0	73.0
75.0 110.0	67.0	73.0
76.0 106.0	73.0	73.0
105.0	94.0	88.0
$M = 94.0$	$M = 74.0$	$M = 77.0$

Из приведенной таблицы a), b) и c) серии 1 видно, что остаточный азот в тканях бластемы и к ней примыкающих участках практически одинаков, равнялась 74 мг% в первом и 77 мг% во втором случае и только немного ниже, чем в нормальной ткани. Эти данные находятся в противоречии с теми данными, которые мы получили в предыдущей работе („Гистолизирующие свойства регенерационной бластемы"), когда было установлено повышение интенсивности распада в тканях остатка органа по сравнению с нормой. Однако это противоречие только кажущееся и легко разрешается если предположить, что в связи с наступившим интенсивным ростом увеличивается потребление продуктов глубокого белкового распада со стороны клеток бластемы.

Поэтому количество остаточного азота в регенерате, несмотря на усиленный распад, не выше нормы. Констатируемое же нами путем действия нингидрина (в предыдущей работе) увеличение в регенерате количества продуктов распада можно отнести за счет крупных обломков белка, осаждаемых трихлоруксусной кислотой и поэтому не могущих быть обнаруженными при данной методике.

Переходя к рассмотрению таблиц a), b) и c) серии 2 мы замечаем, что так называемое латентное время, характеризующее скорость наступления процесса самопереваривания, различно в различных случаях.

Меньше всего оно у нормальной ткани, больше всего у бластемы, так как в бластеме через 3—4 часа никаких следов аутолиза не наблюдается, и среднее место занимают ткани остатка органа, прилежащие к бластеме (подлежащая ткань).

Серия 2. Остаточный азот после 4 часов аутолиза (в мг%)

a) Нормальная ткань	b) Нормальная ткань	c) Бластемы	d) Подлежащая ткань
*p*H 7.4	*p*H 6.4	*p*H 6.4	*p*H 6.4
122.0	138.0	68.0 52.0	76.0 93.0
112.0	112.0	68.0 60.0	82.0
135.0	112.0	78.0 60.0	90.0
135.0	138.0	52.0 51.0	112.0
$M = 126.0$	$M = 128.0$	$M = 61.0$	$M = 90.0$

После 12-часового самопереваривания мы видим следующую картину:

Серия 3. Остаточный азот после 12 часов аутолиза (в мг%)

Нормальная ткань.		Бластема		Подлежащая ткань
a) *p*H 7.4		b) *p*H 6.4	c) *p*H 6.4	d) *p*H 6.4
160.0	146.0	207.0 173.0	170.0 170.0	283.0
154.0	167.0	168.0 222.0	160.0 163.0	342.0
148.0		187.0 219.0	187.0	346.0
144.0		169.0 174.0	170.0	270.0
$M = 152$		$M = 184$	$M = 170$	$M = 310$

Остаточный азот нормальной ткани при *p*H, свойственном ей в условиях жизнедеятельности организма (7.4), равен 152 мг% — увеличение по сравнению с исходной величиной на 58 мг%, при *p*H = 6.4 (свойственной регенерату), количество остаточного азота за 12 часов переваривания увеличивается на 90 мг%, т. е. распад в этом случае идет интенсивнее.

Остаточной азот бластемы равен через 12 часов 170 мг% — увеличение на 96 мг%.

Гораздо более интенсивному перевариванию подвергается так называемая подлежащая ткань (ткани остатка ампутированного органа, граничащие с бластемой). Остаточный азот в этом случае равен 310 мг%. Увеличение на 233 мг%.

При сравнении величин, характеризующих 12-часовое самопереваривание нормальной ткани и бластемы, необходимо иметь в виду, что аутолиз нормальной ткани начинается очень рано и к 4 часам достигает половины того количества остаточного азота, которые мы определили после 12 часов переваривания, в то время как бластема к 4 часам не обнаруживает никаких следов увеличения остаточного азота. Следовательно самопереваривание бластемы по сравнению с нормой начинаясь позже идет гораздо интенсивнее во времени. Работа проведена под руководством Л. Я. Бляхера.

Институт экспериментального морфогенеза.
Москва.

Поступило
2 IV 1834.

BIOLOGIE

ÜBER DIE PROTEOLYSE IN REGENERIERENDEN GEWEBEN

AUTOLYSE DER NORMALEN UND REGENERIERENDEN GEWEBE

Von N. BROMLEY und V. ORECHOVIČ

(*Vorgelegt von A. Richter, Mitglied der Akademie, d. 2. IV. 1934*)

Die Eiweisszerfallprodukte haben nach den Angaben einer Reihe von Forschern und insbesondere der Schule von Carrel (1), für den Wachstum der Gewebe eine grosse Bedeutung. Es ist sehr wahrscheinlich, dass die Anwesenheit dieser Produkte auch für den Wachstum bei Regeneration eine nicht geringe Bedeutung haben kann. Der intensive Zerfall in den Geweberesten des amputierten Organs wurde von einigen Autoren histologisch konstatiert und in unserer vorhergehenden Arbeit „Die histolytischen Eigenschaften der Regenerationsblasteme“ C. R. de l'Acad. d. Sci. de l'URSS, v. I, № 4, 1934 (chemisch und histochemisch) bestätigt. Im letztgenannten Aufsatz wurde von uns gezeigt, dass der verstärkte Eiweisszerfall, der in den Restgeweben des Organs beobachtet wird, sowol mit der Traumatisation, als auch (und zwar noch in grösserem Masse) mit der Anwesenheit des Regenerationsblastems in Zusammenhang steht.

Demnach ist es durchaus zulässig die Frage zu stellen, ob Veränderungen in den Gewebeproteolysebedindungen, die zur Steigerung des intensiven Eiweisszerfalls in den Geweben des amputierten Organs führen, mit der Bildung des Blastems entstehen. Haben wir es im gegebenen Fall mit einer Konzentrationszunahme der proteolytischen Fermenten in den Geweben des Regenerats zu tun, oder mit günstigen Veränderungen der Bedingungen der fermentativen Reaktion?.

Aus welchen Gründen wird eine Intensitätssteigerung des Eiweisszerfalls in den Geweberesten des amputierten Organs (anliegende Gewebe) beobachtet und nicht im Regenerationsblastem?

In der Literatur sind Angaben über diese Frage nicht vorhanden. Etwas ist in dieser Richtung über bösartige Wucherungen schon gearbeitet worden; letztere ähneln, nach der Meinung einer Reihe von Autoren wie Fischer-Wasels, Müller, Sternberg (2) u. a. m., sehr der Regeneration und stehen mit ihr in nahem Zusammenhang. Obgleich wir mit einer gewissen Zurückhaltung zum Standpunkt dieser Autoren Stellung nehmen., halten wir es nicht für uninteressant, kurz die Hauptschlussfolgerungen anzuführen, welche man auf Grund der vorhandenen Arbeiten über die Frage der Proteolyse bösartiger Neubildungen ziehen kann.

Die intensität der Proteolyse bösartiger Geschwülste ist etwas stärker im Vergleich zur Intensität in den stationären Geweben, aus welchen diese Geschwülste hervorgehen. Die Aktivität der proteolytischen Fermente der bösartigen Geschwülste übersteigt jedoch nicht die Aktivität derselben Fermente solcher Organe, wie Nieren, Milz und andere in normalem Zustande.

Qualitativ sind die proteolytischen Fermente der bösartigen Neubildungen, nach den Angeben von Krebs, Kleinmann und Werr ([3]), mit den Fermenten normaler (stationärer) Gewebe identisch. Demnach beruht die Intensitätsveränderung der Proteolyse, welche mit dem Wachstum bösartiger Neubildungen im Zusammenhange steht, entweder auf einer Vergrösserung der Quantität der sich bildenden proteolytischen Fermente, oder aber auch auf Veränderung der Bedingungen der fermentativen Reaktion.

Man kann auch vermuten, dass der beobachtete intensive Eiweisszerfall bei Regeneration in den Geweberesten des Organs mit Veränderungen der Quantität der Fermente oder der Bedingungen ihrer Wirkung im Zusammenhange steht. Zwecks Prüfung dieser Voraussetzung wurde eine Reihe Untersuchungen vorgenommen, deren Resultate teilweise in vorliegender Arbeit dargelegt werden. Als Versuchsmaterial wurden Kaulquappen von *Pelobates fuscus* verwendet. Es wurde der Schwanz amputiert und nach 5—6 Tagen das vom Regenerationsblastem gebildete Gewebe und die dem Regenerat angrenzenden Gebiete das Organs untersucht (anliegende Gewebe). Gleichzeitig wurden auch die normalen (stationären) Gewebe untersucht.

Die Intensität der Autolyse wurde nach der Differenz der Mengen des durch Essigsäuretrichlorid ungefällten Reststickstoffs, am Anfang und am Ende des Versuchs bestimmt. Der Reststickstoff wurde nach der Mikromethode von Kjeldahl mit Modifizierung von Bang bestimmt. Der *p*H-Betrag entsprach den Grössen, welche für das gegebene Gewebe während seines Lebensprozesses charakteristisch sind nach den Angaben von Okuneff ([4]). Ausserdem verlief die Autolyse der normalen Gewebe bei für das Blastem charakteristischem *p*H-Betrage.

Die Quantität der Eiweisszerfallprodukte wurde für die nachfolgenden Momenten bestimmt: 1) vor der Autolyse, 2) vier Stunden nach Beginn der Autolyse, 3) zwölf Stunden nach Beginn der Autolyse.

Die erhaltenen Resultate sind in den nachfolgenden Tabellen zusammengefasst:

Serie 1. Reststickstoff vor der Autolyse (in mg%)

a) Normalgewebe	b) Blastem	c) Gewebereste des amputierten Organs (anliegende Gewebe)
90.0 110.0	62.0	73.0
75.0 110.0	67.0	73.0
76.0 105.0	73.0	73.0
105.0	94.0	88.0
$M = 94.0$	$M = 74.0$	$M = 77.0$

Aus obenstehender Tabelle der Serie 1 ist ersichtlich, dass der Reststickstoffgehalt in den Geweben des Blastems und in den ihm angrenzenden Gebieten praktisch der gleiche ist, nämlich 74 mg% im ersten und 77 mg% im zweiten Fall und nur wenig niedriger als in den normalen Geweben. Diese Angaben befinden sich im Widerspruch mit denjenigen, welche wir in unserer obenerwähnten vorhergehenden Arbeit erhielten, wo eine Erhöhung der Intensität des Zerfalls in den Geweberesten des Organs im Vergleich mit der Norm festgestellt wurde. Jedoch dieser Widerspruch ist nur scheinbar und lässt sich leicht erklären, wenn man annimmt, dass mit dem Beginn des intensiven Wachstums der Verbrauch der tiefen Eiweisszerfallsprodukte vonseiten der Blastemzellen grösser wird.

Deswegen ist die Quantität des Reststickstoffs im Regenerat, ungeachtet des verstärkten Zerfalls, nicht höher als normal. Die von uns durch Einwirkung mit Ninhydrin (in der vorhergehenden Arbeit) konstatierte Vermehrung der Zerfallprodukte im Regenerat kann auf Rechnung der grossen Bruchteile von Eiweiss, welche mit Essigsäuretrichlorid gefällt wurden, gesetzt werden und konnte daher bei der gegebenen Methode nicht wahrgenommen werden.

Serie 2. Reststickstoff vier Stunden nach der Autolyse

a) Normalgewebe	b) Normalgewebe	c) Blastem	d) Anliegendes Gewebe
*p*H 7.4	*p*H 6.4	*p*H 6.4	*p*H 6.4
122.0	138.0	68.0 52.0	76.0 93.0
112.0	112.0	68.0 60.0	82.0
135.0	112.0	78.0 60.0	90.0
135.0	138.0	52.0 51.0	112.0
$M = 126.0$	$M = 128.0$	$M = 61.0$	$M = 90.0$

Zur Betrachtung der Tabelle der 2. Serie übergehend bemerken wir, dass die sogenannte Latenzzeit, welche die Anfangsgeschwindigkeit des Selbstverdauungsprozesses charakterisiert, in verschiedenen Fällen eine verschiedene ist. Am geringsten sie ist bei normalen Geweben, am grössten beim Blastem, da schon nach drei — vier Stunden keine Spur von Autolyse beobachtet wird; eine mittlere Geschwindigkeit weisen die dem Blasteme anliegenden Gewebe des Restorgans auf.

Nach 12-stündiger Selbstverdauung sehen wir folgendes Bild.

Der Reststickstoff der normalen Gewebe bei $p\text{H} = 7.4$, welcher ihnen bei normalen Lebensbedingungen eigen ist, beträgt 152 mg%, — d. h. eine Vergrösserung im Vergleich zur Ausgangsgrösse um 58 mg%. Bei $p\text{H} = 6.4$ (eigen dem Regenerat) vergrössert sich die Quantität des Reststickstoffs während 12-stündiger Autolyse um 90 mg%, d. h. der Zerfall geht in diesem Fall intensiver vor sich.

Der Reststiskstoff des Blastem ist nach 12 Stunden gleich 170 mg% — eine Vergrösserung um 96 mg%.

Serie 3. Reststickstoff zwölf Stunden nach der Autolyse (in mg%)

Normalgewebe		Blastem	Anliegendes Gewebe
a) *p*H 7.4	b) *p*H 6.4	c) *p*H 6.4	d) *p*H 6.4
160.0 146.0	207.0 173.0	170.0 170.0	283.0
154.0 167.0	168.0 222.0	160.0 163.0	342.0
143.0	187.0 219.0	187.0	346.0
144.0	169.0 174.0	170.0	270.0
$M = 152$	$M = 184$	$M = 170$	$M = 310$

Einer weit intensiveren Autolyse ist das sogenannte anliegende Gewebe (Gewebereste des amputierten Organs, welche an das Blastem grenzen) unterworfen. Der Reststickstoff ist in diesem Fall gleich 310 mg% — eine Vergrösserung um 233 mg%. Bei Vergleich der Grössen, welche eine 12-stündige Selbstverdauung normaler Gewebe und Blasteme charakterisieren, muss unbedingt in Betracht gezogen werden, dass die Autolyse normaler Gewebe sehr früh beginnt und nach vier Stunden schon die Hälfte von dem Quantum des Reststickstoffs erreicht, welches wir nach 12-stündiger Autolyse bestimmten, während das Blastem nach 4 Stunden keine Spuren einer Vergrösserung der Reststickstoffmenge aufweist. Folglich beginnt die Autolyse des Blastems im Vergleich mit der Norm später, verläuft aber zeitlich viel intensiver.

Dr. L. Blacher drücken wir unsere Dankbarkeit für seine Leitung aus.

Abteilung für Mechanik der postembryonalen Entwicklung des Instituts für experimentelle Morphogenese. Moskau.

Eingegangen d. 2. IV. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Baker and Carrel. Journ. of Exper. Med., March, 1, 1928. — Lilian Baker and Carrel. Journ of Exper. Med., Sept., 1, 1926. [2] Fischer-Wasels. Dtsch. med. Wochenschr., 54, 1918. — Fischer-Wasels. Klin. Wochenschr., 6, 1927. — Sternberg. Der heutige Stand der Lehre von den Geschwülsten, im besonderen der Carcinome, Wien, 1924. — Müller. Krebsforsch., 28. 1929. [3] Krebs. B. Z., 238, 1931. — H. Kleinmann. u. F. Werr. B. Z., 241, 1931. [4] Okuneff. B. Z., B., 195, 1928.

ГЕНЕТИКА

И. Б. КАБАКОВ и И. А. РЫВКИН

ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ БЛИЗНЕЦОВ

(*Представлено академиком Н. И. Вавиловым 22 V 1934*)

Для выяснения роли наследственности и среды в изменчивости электрокардиограммы (ЭКГ) изучалось внутрипарное сходство и различие последней у одно- и двуяйцевых близнецов. Под сходством ЭКГ подра-

зумевался одинаковый тип одноименных зубцов в отношении их формы и направления в соответствующих отведениях. Величина же зубцов могла при этом несколько отличаться друг от друга, не меняя, однако, тем самым общего типа кривой. Суммируя полученные данные с опубликованными в работе Кабакова (см. Медико-биологический журнал, 1930, вып. 4—5), мы имеем 81 пару однояйцевых и 69 пар двуяйцевых близнецов. Наибольшее число пар падало на возраст от 6 до 15 лет; старше 16 и особенно 20 лет встречались только единичные пары. Диагноз одно- и двуяйцевости устанавливался генетическим отделением Медико-биологического института по методу сходства (Сименс).

Наличие сходства или, наоборот, различия в характере ЭКГ устанавливалось, главным образом, по первому отведению, как более стойкому.

При сравнении ЭКГ однояйцевых близнецов оказалось (см. табл. 1), что имеется внутрипарное сходство в 71 случае; в 5 случаях ОБ имелось лишь частичное сходство в характере ЭКГ и в таком же количестве случаев ОБ были различными. (Интересно отметить, что ЭКГ 6 пар взрослых ОБ в возрасте 20—46 лет, несмотря на разницу в условиях работы, жилища и питания, оказались чрезвычайно сходными между собой. В некоторых парах при значительном общем сходстве ЭКГ между собой имелось различие в характере отдельных зубцов, что, возможно, связано с разницей в перенесенных инфекциях или в общем состоянии здоровья между обоими близнецами.)

Таблица 1

Сходство и различие ЭКГ	ОБ — 81 пара		Средняя ошибка	ДБ — 69 пар		Средняя ошибка
	Число	%		Число	%	
Сходство	71	87.6	—	7	10.1	—
Различие	5	6.2	±3.1	53	76.8	±3.5
Сомнительные . . .	5	6.2	—	9	13.1	—

Что касается двуяйцевых близнецов, то в 53 случаях, т. е. в 76.8%, ЭКГ оказались внутрипарно различными; в 7 случаях ЭКГ обоих партнеров давали полное и в 9 частичное сходство (последние попали в группу сомнительных).

Такое значительное сходство ЭКГ у ОБ при одновременном различии ее у ДБ с несомненностью указывают на то, что изменчивость ЭКГ в очень резкой степени обусловлена генотипическими факторами. Эти же данные говорят также за то, что из числа многочисленных факторов, участвующих в генезе ЭКГ, повидимому, наибольшее значение в изменчивости формы отдельных зубцов имеет проводниковая система сердца, как фенотипически наименее лябильная. Следует также указать и на то, что учет внутрипарного сходства, resp. различия, ЭКГ может быть использован для диагностики одно- и двуяйцевости близнецов. Пользуясь только сходными или различными ЭКГ (оставляя, следовательно, в стороне случаи сомнительные) мы имеем при наличии сходства вероятности диагноза двуяйцевости 0.09 [7 : (7 + 71)], а однояйцевости — 0.91. При наличии же различных ЭКГ мы имеем наоборот вероятность двуяйцевости 0.91 [53 : (53 + 5)], а однояйцевости — 0.09.

Следующей задачей было выяснение причины изменчивости отдельных зубцов ЭКГ. В качестве ближайшего объекта изучения был взят зубец *T*, происхождение и значение которого вызывают много разногласий в специальной литературе. Высота зубца *T*, при общем значительном сходстве ЭКГ у ОБ, оказалась в подавляющем числе случаев внутрипарно различной. Причиной этого явления могло быть наличие какой-либо разницы в условиях развития внутри данной пары ОБ, изменивших, в свою очередь, те факторы, которые принимают участие в изменчивости зубца *T*. К числу последних относились прежде всего размеры сердца, как левой половины его (Ml), так и всего поперечника его (Tr), которые устанавливались по рентгеновским телеснимкам и ортодиаграммам, а также окружность грудной клетки. Зубец *T* изучался в 1-м отведении как более стойком; высота его, измеренная в миллиметрах, сравнивалась в пределах одной пары. У всех близнецов собирался тщательный анамнез и производился подробный клинический осмотр. Всего подверглись обследованию 62 пары ОБ, из них мужских 30 и женских 32; 48 пар относится к возрасту до 15 лет, 7 пар — от 16 до 20 лет, остальные к более старшему.

Материал по вопросу о связи высоты зубца с окружностью грудной клетки имеется по 57 парам. Как видно из табл. 2 в 24 случаях у близнеца с более высоким по сравнению с его партнером зубцом имелась и большая окружность грудной клетки, в 23 случаях имелось обратное явление. Эти данные указывают на то, что распределение материала здесь происходит чисто случайно и что никакой связи между высотой зубца *T* и окружностью грудной клетки не имеется.

Таблица 2

Большая высота зубца *T* совпадала с окружностью грудной клетки		
большей	одинаковой	меньшей
24	10	23

По вопросу о корреляции между высотой зубца *T* и размерами сердца имеется материал, охватывающий 53 пары ОБ. В одном случае высота зубца *T* у обоих партнеров была одинаковой, во всех же остальных 52 парах имелась некоторая внутрипарная разница.

Таблица 3

	Совпадение		Несовпадение		Средняя ошибка
	более высокого зубца *T* с большими размерами				
	В абсол. цифрах	В %	В абсол. цифрах	В %	
Левой половины сердца	40	76,9	12	23,1	±3.6
Поперечника всего сердца	34	65,4	18	34,6	

Как видно, из табл. 3 в подавляющем большинстве случаев, а именно в 65.4%, большей высоте зубца T соответствовали и большие размеры сердца, причем разница в размерах последнего колебалась от нескольких миллиметров до полутора сантиметров. Еще больше совпадение это выражено между высотой зубца T и размерами левой половины сердца (Ml) и достигает 76,9% всех случаев. Однако, разница между степенью совпадения Tr и Ml не велика и находится в пределах средней ошибки.

Из приведенных данных можно с несомненностью вывести заключение о том, что существует положительная корреляция между высотой зубца T и величиной сердца в особенности левого сердца.

Вышеприведенные данные указывают на то, что однояйцевые близнецы обладают огромными преимуществами по сравнению с другим материалом при изучении физиологических и патологических корреляций в организме человека.

Медико-биологический научно-исследовательский институт им. М. Горького.
Москва.

Поступило
22 V 1934.

GENETICS

ELECTROCARDIOGRAPHIC STUDIES IN TWINS

By I. KABAKOV and I. RYVKIN

(*Communicated by N. Vavilov, Member of the Academy, 22. V. 1934*)

In order to clarify the roles of heredity and environment in the variability of the electrocardiogram (ECG), intrapair similarities and differences in identical and fraternal twins have been studied. By similarity of the ECG is implied the same type of particular peaks in respect to their form and direction in corresponding hook-ups.

The sizes of the peaks might differ slightly from each other without involving differences in the types of the curves. Taking together our data and those published in the work of Kabakov (Medico-Biological Journal, 1930, Nos 4 and 5), we have 81 pairs of identical and 69 pairs of fraternal twins. The majority of the pairs are between 6 and 15 years of age; only a few pairs are older than 16 years. The diagnoses of identity were made by the Genetic Department of the Medico-Biological Institute, by the method of Siemens.

The presence of similarity or difference in the type of ECG was determined in general after the first hook-up, which was taken as the most stable one.

The comparison of ECG's of identical twins showed (see table 1) that there was intrapair similarity in 71 cases; in 5 identical pairs the ECG curves were not wholly similar, and in the remaining five pairs the curves were quite different. (It is of interest to note that 6 adult identical pairs aged 20 to 46 years, in spite of differences in work, housing, and food, showed marked similarity. In a few pairs showing considerable general similarity there were differences in the characteristics of the

separate peaks, which possibly was related to differences in infectious diseases or in the general states of health of the two twins.)

Table 1

Similarity and difference of ECG	MT — 81 pairs		Mean error	FT — 69 pairs		Mean error
	Number	%		Number	%	
Similarity	71	87.6	—	7	10.1	—
Difference	5	6.2	±3.1	53	76.8	±3.5
Dubious	5	6.2	—	9	13.1	—

As to the fraternal twins, 53 cases or 76.8% showed intrapair differences in the ECG; in 7 cases both partners showed marked similarity, and in 9 cases some similarity (the latter fell into the doubtful group).

Such a significant similarity among the identicals and the differences among the fraternals undoubtedly show that variability in the ECG is conditioned to a very high degree by genotypical factors. These data demonstrate that among the many factors affecting the ECG the most significant in the variability of the form of the separate peaks is evidently the conduction system of the heart, since it is phenotypically the least unstable.

It may be also pointed out that the intrapair similarities and the intrapair differences in the ECG may be used for diagnosing the identity or non-identity of twins. Using only the similar or the different ECG's (leaving aside consequently all the doubtful cases), we have, using the similarities in the present data, a probability of diagnosis of fraternity of 0.09 [7 + (7 + 71)] and of identity 0.91. On the other hand, with the differences in the ECG, we have conversely a probability of 0.09.

The next problem was the clarification of the causes of the variability of the peaks in the ECG. As the most important object of study we took the peak *T*, the origin and significance of which has been the occasion of many differing opinions in the technical literature. The height of the peak *T*, despite the rather great similarity of the ECG among the identicals, happened to be different in the majority of the intrapair cases. The cause of this phenomenon could be the presence of certain differences in the conditions of development within the given fraternal pair, which affect, in their turn, those factors which play a part in the variability of the peak *T*. Among the latter were considered the size of the heart, its left half (Ml) as well as its entire width (Tr), which were determined by telescopic röntgenograms and orthodiagrams, and also the circumference of the chest.

The peak *T* was studied in the first hook-up as the most stable one; its height taken in millimeters was compared within the limits of one pair. A thorough personal history was gathered for each of the pairs, and all of them were subjected to detailed clinical examinations. Altogether the investigation comprised 62 pairs of identicals, of whom 30 were male and 32 female; 48 pairs were below 15 years of age, 7 pairs were from 16 to 20 years, and the remaining pairs were older.

The material concerning the problem of the relation between the height of the peak *T* and the circumference of the chest includes 57 pairs. As is seen from table 2, in 24 cases the twin with the higher peak, in comparison with his partner, has the greater chest circumference, while for 23 cases the opposite relationship holds. These data indicate that the distribution of the material here represents pure chance, and that no relationship exists between the height of the peak *T* and the circumference of the chest.

Table 2

The greater height of the peak *T* coincided with the chest measurement		
a greater one	the same	a smaller one
24	10	23

For the problem of the correlation between the height of the peak *T* and the size of the heart, we have material on 53 pairs of identicals. In one case the height of the peak *T* was the same for both partners, and among all of the remaining 52 pairs there was a certain intrapair difference.

Table 3

	Coincidence		Non-coincidence		Mean error
	of a higher peak *T* with greater dimensions				
	Absolute number	%	Absolute number	%	
Left side of the heart	40	76.9	12	23.1	±3.6
Diameter of the whole heart	34	65.4	18	34.6	

As is seen from table 3, in the majority of cases, namely in 65.4%, the greater height of the peak *T* is associated with the greater size of the heart, the difference in the size of the latter varying from a few millimetres to one and a half centimetres. This coincidence is even clearer between the height of the peak *T* and the size of the left half of the heart (Ml), for which the coincidence reaches 76.9% of all the cases. However, the difference between the degrees of this coincidence for (Tr) and (Ml) is not great and is within its probable error.

The above data enable us to conclude with certainty that there exists a positive correlation between the height of the peak *T* and the size of the heart, and particularly of the left side of the heart.

It has been shown that, in comparison with other material, identical twins hold great advantages for the investigation of physiological and pathological relationships in the human organism.

Medico-Biological Scientific Research Institute. Moscow.

Received 22.V. 1934.

КОЛБАНОВСКИЙ и МИРЕНОВА

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА МЕТОДОВ РАЗВИТИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ У ДОШКОЛЬНИКА

(ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА ОДНОЯЙЦЕВЫХ БЛИЗНЕЦАХ)

(Представлено академиком Н. И. Вавиловым 22 V 1934)

Задачей исследования было выяснить эффективность различных методов развития комбинаторных функций у дошкольника.

С этой целью была проведена двухмесячная тренировка пяти пар однояйцевых близнецов в возрасте 5—5½ лет. Один из партнеров каждой пары тренировался методом элементных фигур (*Э*), а другой — методом моделей (*М*).

Сущность метода *Э* заключалась в следующем: испытуемый должен был складывать предложенные фигуры строительного типа, все составные элементы которых и их комбинация были известны испытуемому (он мог их видеть).

Во втором случае (метод *М*) предлагались те же фигуры, но в виде моделей, т. е. такие фигуры, конструкция частей которых не была видна испытуемому. В первом случае испытуемый пассивно копировал постройку, во втором — активно конструировал. Спустя два месяца такой тренировки была проведена контрольная задача, которая заключалась в том, что обоим партнерам была предложена новая, более сложная фигура. Каждый партнер должен был сложить ее двояким путем: привычным для него методом и обратно — методом, которым тренировался его партнер.

Результаты тренировки были следующие:

1. Процесс комбинирования испытуемых *М* протекал значительно труднее и медленнее по сравнению с комбинированием их партнеров.

2. На ряду с этим испытуемые *М* обнаружили большое богатство и разнообразие манипуляций, в то время, как у испытуемых *Э* оно отсутствует совсем.

Испытуемые *М* во всех случаях на решении контрольной фигуры дали более высокие показатели по сравнению с таковыми у испытуемых *Э*.

Кроме этого испытания были проведены занятия на свободное творчество до и после тренировки с целью выяснить, отразилась ли тренировка на творческих способностях испытуемых. Анализ и сравнение полученных данных обнаружили следующее: свободные постройки испытуемых *М* богаче по содержанию и сложнее по своей конструкции, чем постройка испытуемых *Э*.

Выводы отсюда можно сделать следующие:

1. Метод элементарных фигур, т. е. метод пассивного копирования и подражания, не развивает комбинаторные способности.

2. Метод моделей, или метод активного и самостоятельного конструирования, развивает комбинаторные способности.

3. Для педагогической практики метод активной стимуляции в обучении является наиболее желательным.

Кабинет психологии
Медико-биологического института
им. М. Горького. Москва.

Поступило
22 V 1934.

GENETICS

A COMPARATIVE EVALUATION OF METHODS FOR THE DEVELOPMENT OF COMBINATIVE FUNCTIONS IN PRESCHOOL CHILDREN

(EXPERIMENTS WITH TWIN CONTROLS)

By KOLBANOVSKIJ and MIRENOVA

(Communicated by N. Vavilov, Member of the Academy, 22. V. 1934)

Summary

The present study has sought to investigate the efficiency of different methods for the development of combinative functions in preschool children.

Five pairs of identical twins aged 5 to $5^1/_2$ years were subjected to two months of training. One of the members of each pair was trained by the method of elementary figures (*E*) and the other by the method of models (*M*).

The *E* method required the subject to reproduce with blocks certain given figures in which all the component elements and combinations were visible to him.

For the *M* method, the same figures were presented, but in the form of paper-covered models, in which the construction of the parts was concealed from the subject. In the first case, the subject copied the model passively; in the second case, he constructed it actively. After two months of such training, a control task was presented. A new and more complex figure was given to both partners. Each of them had to build it in two ways: by the method which was customary for him and by the converse method, in which his partner was trained.

During the training it was observed that:

1. The process of combination was much slower and much more difficult for the *M* subjects that for their partners.

2. The *M* subjects, however, developed a great abundance and diversity of manipulatory skills, while among the *E* subjects such development appeared lacking.

At the end of the training period, all of the *M* subjects showed better scores in the execution of the control figure that the *E* subjects.

Besides this test, other tasks affording opportunity to creative powers were also given, before and after the course of training, in order to see whether training had any influence on the general creative faculties of the subjects.

Analysis of these data showed that the free constructions executed by the *M* subjects were more complicated in intention and more complex in their execution than the constructions of the *E* subjects.

It is concluded that the method of active and independent construction develops the combinative functions much more effectively than does the method of passive copying and imitation, and that for pedagogical practice the method of active stimulation is the most desirable method of teaching.

Medico-Biological Institute.
Moscow.

Received
22. V. 1934.

ГЕОЛОГИЯ

В. С. СЛОДКЕВИЧ

К СТРАТИГРАФИИ ТРЕТИЧНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ ЗАПАДНОГО ПОБЕРЕЖЬЯ КАМЧАТКИ

(*Представлено академиком А. А. Борисяком 5 V 1934*)

Исследование геологического строения Камчатки, предпринятое в связи с возможностью нахождения там промышленных месторождений нефти, доставило богатые палеонтологические коллекции, заключающие много интересных и весьма своеобразных видов моллюсков. Определение части этих сборов за 1932 год позволило, несмотря на отрывочность и неполноту их, наметить приближенную схему стратиграфии третичных отложений западного побережья, нуждающуюся в дальнейшей детализации и уточнении, так как мощность третичных свит очень велика, а изученные коллекции собирались не послойно, в связи с маршрутным характером геологических исследований.

Первые более подробные сведения о геологическом строении западного побережья Камчатки приведены в работе Б. Ф. Дьякова „Отчет о геологическом строении западного побережья Камчатки (Тигильский район)".

Здесь же впервые устанавливается расчленение третичных отложений на основании предварительных определений заключающейся в них фауны.

В основании третичных отложений залегает хребтово-утхолокская свита, состоящая из мощных, переслаивающихся пачек тонко- и толсто-плитчатого, плотного, серого песчаника, глинистого песчаника и глинистого сланца, общей мощностью до 2000 м. Содержащаяся в них фауна очень плохой сохранности и не поддается точному определению. Залегание этой свиты на палеонтологически охарактеризованной меловой свите Медвежьего Хребта позволяет отнести хребтово-утхолокскую свиту к палеогену, без более подробной детализации.

Ковачинская свита состоит из черных и темных глинистых и песчано-глинистых сланцев с тонкой листоватой или скорлуповатой отдельностью; в ядрах синклиналей залегает согласно на хребтово-утхолокской свите и достигает 1500 м мощности. Определенная отсюда фауна весьма немногочисленна и представлена следующими видами: *Cardita kovatschensis* n. sp., *Palliolum pedroanus* [Trask] var. *peckhami* [Gabb], *Thyasira* cf. *bisecta* [Conr.], *Variamussium* cf. *pillarensis* n. sp.

Преобладающими по количеству отдельных особей, местами переполняющие породу и могущие служить до некоторой степени руководящими окаменелостями для этой свиты являются *Palliolum pedroanus peckhami* [Gabb] и *Cardita kovatschensis* n. sp. Первый вид встречается в Калифорнии от олигоцена до среднего миоцена; *Cardita kovatschensis* — новый вид, но обнаруживает наибольшее сходство с известными нижнемиоценовыми видами; из остальных форм *Variamussium pillarensis* найден также в Северной Америке, в толще, возраст которой определяется от верхнего олигоцена до нижнего миоцена. Как видно из этого короткого списка, имеющихся в настоящее время данных для установления возраста отложений ковачинской свиты еще недостаточно. Повидимому, он может быть нижнемиоценовый или, менее вероятно, верхнеолигоценовый.

Следующая вверх тигильская свита залегает несогласно на более древних отложениях до свиты Медвежьего хребта включительно. Резко отличающаяся по своему литологическому составу от пород Ковачинской свиты, она состоит из серых песчаников, переслаивающихся с глинистыми песчаниками и темносерыми глинами. Общая мощность до 1500 м. Первоначально данное для этой свиты название „нефтеносная" неудачно, как по причинам обще-геологического характера, так и по ряду других соображений, и поэтому заменяется на „тигильская свита". Здесь определены: *Cardita ferruginea* Ad., *C. ventricosa* Gld., *Modiolus dilatatum* n. sp., *M. flabellatus* Gld. var. *utcholokensis* n. var., *Mytilus* cf. *arnoldi* Cl., *M. littoralis* n. sp., *M.* (?) *yokoyamai* n. sp., *Thyasira bisecta* Conr.; *Polinices galianoi* Dall, *P.* cf. *reclusiana* Desh.

Наибольшим распространением здесь пользуется *Mytilus littoralis* n. sp., который можно считать руководящей формой для этой свиты. Возраст ее может быть установлен как среднемиоценовый для верхней части свиты и, возможно, нижнемиоценовый для ее нижней части.

Верхние горизонты тигильской свиты переходят по простиранию в нижнюю часть белесоватой свиты. Весьма характерные по внешнему виды породы этой свиты состоят из темных в свежем изломе и белесоватых в выветрелом состоянии, кремнистых, опоковидных глин, глинистых песчаников и конгломератов. Общая мощность свиты до 2500 м. Богатая фауна моллюсков представлена следующими видами: *Acila cobboldiae* [Sow.], *A. divaricata* Hinds var. *submirabilis* [Mak.], *Laternula* (*Aelga*) *besshoana* [Yok.], *Cardita denudata* n. sp., *C. tokunagai* Yok., *C. snatolana* n. sp., *C.* (*Miodontiscus*) *kinkilana* n. sp., *C.* (*Mytilicardita*?) *pacifera* Yok., *Laevicardium* (*Cerastoderma*) cf. *corbis* Mart., *Macoma nasuta* Conr., *Modiolus restorationensis* Van Winkle var. *palmuloidea* n. var., *M. solea* n. sp., *M. tetragonalis* n. sp., *M. trigonalis* n. sp., *M. wajampolkensis* var. *angulatus* sp. et var. nova, *Mya arenaria* var. *arenaria* L., *M. arenaria* L. var. *japonica* Jay, *M. truncata* L., *Mytilus perrini* Cl. var. *folioformis* Isaeva, *M. watersi* Eth. var. *tigilensis* n. var., *Nuculana taphria* Dall, *N. wajampolkana* n. sp., *Palliolum* (*Delectopecten*) *pedroanus* [Trask], *P.* (*Delectopecten*) *pedroanus* [Trask] var. *peckhami* [Gabb], *Papyridea harrimani* Dall, *Taras harfordi* And., *T. orbellus* Gld., *Thracia* (*Thracia*) *condoni* Dall, *Thyasira bisecta* Conr., *T. clarki* n. sp., *Venericardia kevetscheveemensis* n. sp., *Yoldia alta* n. sp., *Y. convexa* n. sp., *Y. longissima* n. sp., *Y. nitida* n. sp., *Y. pennulata* n. sp., *Y.* cf. *temblorensis* And. & Mart., *Y. thraciaeformis* [Stor.]; *Epitonium* cf. *submanulosum* Nag., *Natica* cf. *pabloensis* Cl., *Pleurofusia* cf. *raricostata* Gabb, *Polinices* (*Euspira*) *galianoi* Dall, *Psephea prevostiana* Crosse var. *oregonensis* Dall, *Sigaretus oblongus* Rve., *Turritella belogolovia* Il. (n. sp.), *T.* cf. *nipponica* Yok., *T. tokunagai* Yok.

Изучение этой фауны показало наличие в белесоватой свите не менее двух отделов, из которых нижний может быть параллелизован с верхней частью тигильской свиты и имеет среднемиоценовый возраст, а верхний отдел относится к верхнему миоцену.

Залегающая трансгрессивно на этой последней кавранская свита* сложена из грубо-зернистого, неотсортированного, рыхлого, косослоистого песчаника с прослоями ракушечников и конгломератов и достигает 1000 м мощности. Из исключительно богатой и хорошо сохранившейся здесь фауны определены: *Apolymetis excavata* Sow., *Cardita beringiana* n. sp., *C. crassidens* Brod. & Sow., *C. monilicosta* Gabb var. *ochotica* n. var., *C. yatesi*

* Первоначальное название этой свиты „морская толща" также изменено по вышеуказанным соображениям.

Arn., *Macoma inquinata* Desh., *M. nasuta* Conr., *M. truncatoides* Khom., *Modiolus angulatus* n. sp., *M. inflatus* n. sp., *M.* (?) *ochotensis* n. sp., *M. tenuistriatus* n. sp., *M. wajampolkensis* n. sp., *Mya arenaria* var. *arenaria* L., *M. arenaria* L. var. *japonica* Jay, *Mytilus* cf. *middendorffi* Grew., *Nuculana (Nuculana) pernula* [Müll.], *N. wajampolkana* n. sp., *Pecten (Patinopecten) caurinus* [Gld.] var. *oregonensis* [Howe.], *P. (Pecten)* ex. gr. *hastatus* Sow. var. (?), *P. (Pallium) swiftii* Bern. var. *etchegoini* And., *P. swiftii* Bern. var. *nutteri* Arn., *Sanguinolaria (Nuttallia) ochotica* n. sp., *Taras semiasperum* Phil., *T.* cf. *usta* Gld., *Tellina aragonia* Dall, *T.* cf. *chibana* Yok., *T.* cf. *lutea* Gray, *T. pulchra* n. sp., *Thyasira bisecta* [Conr.] var. *nipponica* Yabe & Nom., *T. disjuncta* Stew. var. *ochotica* n. var., *Yoldia convexa* n. sp., *Y. kuluntunensis* n. sp., *Y. ochotensis* Khom., *Y. supraoregona* Khom. var. (?); *Crepidula fornicata* L., *C. grandis* Midd., *C. onyx* Sow., *C. squama* Rve., *Epitonium* cf. *submanulosum* Nag., *Lora kamschatica* Il. (n. sp.), *Natica clausa* Brod. & Sow., *N. janthostoma* Desh., *Neptunea andersoni* Mart. var. *hawleyi* Cars., *N.* cf. *arthrica* Val., *N. despecta* L. var. *borealis* Phil., *N. despecta* L. var. *tuberculata* Yok., *N. (Colus) eurekaensis* Mart., *Polinices (Euspira) galianoi* Dall., *Puncturella nobilis* Ad., *Scalaria* cf. *similis* Sow., *Scenea* cf. *nipponica* Yok., *Turritella kamschatica* Il. (n. sp.), *T.* cf. *pertebra* Yok., *T. tokunagai* Yok.

Сопоставление фауны из различных обнажений позволяет разделить кавранскую свиту на 2 отдела, из которых нижний соответствует по возрасту среднему плиоцену, а верхний — верхнему плиоцену. Возможно, что самая верхняя часть свиты заходит даже в плейстоцен. Нижнеплиоценовой фауны пока найдено не было, и к этому времени, повидимому, относится перерыв в отложении осадков.

Нефтяной геолого-разведочный институт.
Ленинград.

Поступило
5 V 1934.

GEOLOGY

ON THE STRATIGRAPHY OF THE TERTIARY DEPOSITS OF THE WESTERN COAST OF KAMCHATKA

By V. SLODKEVIČ (W. SLODKEWITSCH)

(Communicated by A. Borissiak, Member of the Academy, 5. V. 1934)

The investigation of the geological structure of Kamchatka, which was undertaken in connections with the possibility of finding there productive oil-fields, resulted in rich palaeontological collections containing many interesting and very peculiar species of mollusks. The identification of a part of these collections in 1932 allowed to mark out an approximate schema of the stratigraphy of tertiary rocks of the western coast, requiring a further particularization and specification, since the thickness of the tertiary series is very great.

The first more detailed data on the geological structure of the western coast of Kamchatka are to be found in the memoire of B. Djakov. In that work a splitting into sections of the tertiary deposits has been established for the first time on the basis of preliminary determinations of the fauna contained therein.

In the base of the tertiary deposits the Khrebtovo-Utkholok series is stratified, consisting of thick interbedded riders of thinly- and

thickly-laminated, compact gray sandstones, clayey sandstone and clayey shale, altogether 2000 metres thick. The fauna contained therein is in a very bad state of preservation and cannot be accurately determined. The fact that this series rests upon a paleontologically characterized cretaceous series of the Medvezhy Khrebet permits to refer the Khrebtovo-Utkholok series to the Paleogene, without any further particularization.

The Kovachin series consists of black and dark clayey and sandstone-clayey shales with a thin foliated or shelly joint; in the cores of the synclines it lies conformably upon the Khrebtovo-Utkholok series and reaches 1500 meters in thickness. The fauna determined here is very scanty. It is represented by the following species: *Cardita kovatschensis* n. sp., *Palliolum* (*Delectopecten*) *pedroanus* [Trask] var. *peckhami* [Gabb], *Thyasira* cf. *bisecta* [Conr.], *Variamussium* cf. *pillarensis* n. sp.

Palliolum pedroanus peckhami [Gabb.] and *Cardita kovatshensis* n. sp. are the most numerous, overfill in places the rock, and can to a certain degree be regarded as the leading fossils for the series. The first species occurs in California from the Oligocene up to the middle Miocene; *Cardita kovatschensis* is a new species, but it resembles very much the common lower Miocene species. Of the other forms *Variamussium pillarensis* has been found also in North America, in the complex whose age is defined as being from the Upper Oligocene to the Lower Miocene. As may be seen from this short list, the available data are insufficient for establishing the age of the Kovachin series. It can be of either Lower Miocene or Upper Oligocene age.

The Tighil series following further up rests unconformably on older deposits up to the series of the Medvezhy Khrebet inclusive. It is sharply distinguished from the rocks of the Kovachin series by its lithological structure, being built up of gray sandstones interbedded with clayey sandstones and dark gray clays. Its total thickness amounts up to 1500 metres. The designation 'Oil-Bearing', which has been first given to this series, is unsuitable on account of its general geological character, as well as a number of other reasons, and is therefore changed into Tighil series. The following species have been determined here: *Cardita ferruginea* Ad., *C. ventricosa* Gld., *Modiolus dilatatum* n. sp., *M. flabellatus* Gld. var. *utcholokensis* n. var. *Mytilus* cf. *arnoldi* Cl., *M. littoralis* n. sp., *M. (?) yokoyamai* n. sp., *Thyasira bisecta* Conr.; *Polinices galianoi* Dall., *P.* cf. *reclusiana* Desh.

The most widely distributed of them is *Mytilus littoralis* n. sp., which can be regarded as the leading form of the series. Its age can be fixed as Middle Miocene for the upper part of the series and, possibly, Lower Miocene for its inferior part.

The upper horizons of the Tighil series pass into the lower part of the Byelessovataya ('Whitish') series. The rocks characteristic of this series consist of dark in their fresh fracture and whitish in their weathered condition siliceous clays, clayey sandstones and conglomerates. The total thickness of the series amounts up to 1000 metres. An abundant fauna of molluscs is represented by the following species: *Acila cobboldiae* Sow., *A. divaricata* Hinds var. *submirabilis* Mak., *Laternula (Aelga) besshoana* [Yok.], *Cardita denudata* n. sp., *C. tokunagai* Yok., *C. snatolana* n. sp., *C. (Miodontiscus) kinkilana* n. sp., *C. (Mytilicardita?) pacifera* [Yok.], *Laevicardium* (*Cerastoderma*) cf. *corbis* Mart., *Macoma nasuta* Conr., *Modiolus restorationensis* Van Winkle var. *palmuloidea* n. var., *M. solea* n. sp., *M. tetragonalis* n. sp., *M. trigonalis* n. sp., *M. wajampolkensis* var. *angulatus* sp. et var. nova, *Mya arenaria* var. *arenaria* L., *M. Arenaria* L. var. *japonica* Jay, *M. truncata* L., *Mytilus perrini* Cl. var. *folioformis* Isaeva, *M. watersi* Eth. var. *tigilensis* n. var., *Nuculana*

taphria Dall, *N. wajampolkana* n. sp., *Palliolum pedroanus* [Trask], *P. pedroanus* [Trask] var. *peckhami* [Gabb], *Papyridea harrimani* Dall, *Taras harfordi* And., *T. orbellus* Gld., *Thracia, (Thracia) condoni* Dall, *Thyasira bisecta* Conr., *T. clarki* n. sp., *Venericardia kevetscheveemensis* n. sp., *Yoldia alta* n. sp., *Y. convexa* n. sp., *Y. longissima* n. sp., *Y. nitida* n. sp., *Y. pennulata* n. sp., *Y.* cf. *temblorensis* And. & Mart., *Y. thraciaeformis* Stor.; *Epitonium* cf. *submanulosum* Nag., *Natica* cf. *pabloensis* Cl., *Pleurofusia* cf. *raricostata* Gabb, *Polinices* (*Euspira*) *galianoi* Dall, *Pscphea prevostiana* [Crosse] var. *oregonensis* [Dall], *Sigaretus oblongus* Rve, *Turritella belogolovia* Il. (n. sp.), *T.* cf. *nipponica* Yok., *T. tokunagai* Yok.

The investigation of this fauna showed the presence in the Byelessovataya series of no less than two sections, of which the lower can be paralleled with the upper part of the Tighil series and is of Middle Miocene age, while its upper part must be referred to the Upper Miocene.

The Kavrana series* resting transgressively on the Byelessovataya series is built up of rough-grained, unsorted, loose, obliquely-bedded sandstone with interlayers of shell-limestone and conglomerates, and attains up to 1000 metres in thickness. Of its exceptionally abundant fauna in a good state of preservation the following species have been determined: *Apolymetis excavata* Sow., *Cardita beringiana* n. sp., *C. crassidens* Brod. & Sow., *C. monilicosta* Gabb. var. *ochotica* n. var., *C. yatesi* Arn., *Macoma inquinata* Desh., *M. nasuta* Conr., *M. truncatoides* Khom., *Modiolus angulatus* n. sp., *M. inflatus* n. sp., *M. ochotensis* n. sp., *M. tenuistriatus* n. sp., *M. wajampolkensis* n. sp., *Mya arenaria* var. *arenaria* L., *M. arenaria* L. var. *japonica* Jay, *Mytilus* cf. *middendorffi* Grew., *Nuculana* (*Nuculana*) *pernula* [Müll.], *N. wajampolkana* n. sp., *Pecten* (*Patinopecten*) *caurinus* [Gld.] var. *oregonensis* [Howe] *P.* (*Pecten*) ex. gr. *hastatus* Sow. var. (?), *P.* (*Pallium*) *swiftii* [Bern.] var. *etchegoini* [And.], *P. swiftii* [Bern.] var. *nutteri* [Arn.], *Sanguinolaria* (*Nuttallia*) *ochotica* n. sp., *Taras semiasperum* Phil., *T.* cf. *usta* Gld., *Tellina aragonia* Dall, *T.* cf. *chibana* Yok., *T.* cf. *lutea* Gray, *T. pulchra* n. sp., *Thyasira bisecta* Conr. var. *nipponica* Yabe & Nom., *T. disjuncta* Stew. var. *ochotica* n. var., *Yoldia convexa* n. sp., *Y. kuluntunensis* n. sp., *Y. ochotensis* Khom., *Y. supraoregona* Khom. var. (?); *Crepidula fornicata* L., *C. grandis* Midd., *C. onyx* Sow., *C. squama* Rve., *Epitonium* cf. *submanulosum* Nag., *Lora kamschatica* Il. (n. sp.), *Natica clausa* Brod. & Sow., N. *janthostoma* Desh., *Neptunea andersoni* Mart. var. *hawleyi* Cars., *N.* cf. *arthrica* Val., *N. despecta* L. var. *borealis* Phil., *N. despecta* L. var. *tuberculata* Yok., *N.* (*Colus*) *eurekaensis* Mart., *Polinices* (*Euspira*) *galianoi* Dall, *Puncturella nobilis* [Ad.], *Scalaria* cf. *similis* Sow., *Scenea* cf. *nipponica* Yok., *Turritella kamschatica* Il. (n. sp.), *T.* cf. *pertebra* Yok., *T. tokunagai* Yok.

A comparison of the faunae of different exposures permits to subdivide the Kavrana series into two sections of which the lower one corresponds in respect of age with the Middle Pliocene and the upper one with the Upper Pliocene. It is possible that the uppermost part of the series reaches even the Pleistocene. There has been found no fauna of Lower Pliocen age, and the interruption in the deposition of sediments seems to belong to this time.

Institute of Oil Prospecting.
Leningrad.

Received
5. V. 1934.

---

* The original designation of this series was Morskaya ('Marine complex').

ЗООЛОГИЯ

А. П. СЕМЕНОВ-ТЯН-ШАНСКИЙ

О НОВОМ РОДЕ ПОДСЕМЕЙСТВА *PAMPHILIINAE* (*HYMENOPTERA PAMPHILIIDAE*)

(Представлено академиком С. А. Зерновым 25 V 1934)

Редко встречающаяся в средней и отчасти северной Европе *Cephaleia* (rectius: *Cephalia*) *reticulata* (L. 1758), прежде относившаяся к роду *Lyda* Fabr., включена покойным Фр. В. Коновом в установленный им в 1897 г. ([1]) подрод *Caenolyda* ([2]). Однако, вид этот настолько обособлен в современной фауне, резко отличаясь некоторыми морфологическими особенностями как и всем своим обликом от второго, до сих пор известного палеарктического*, равно как и от всех неарктических представителей подрода *Caenolyda* Knw., что безусловно должен быть выделен в особый род, независимо от того, рассматривать ли группу *Caenolyda* Knw., как самостоятельный род или же как подрод рода *Cephaleia* (rectius: *Cephalia*) Panz., Jur.

Новый род может быть охарактеризован следующими особенностями:

DICTYOLYDA, gen. nov.

Genus subfamiliae *Pamphiliinarum*, *Cephaleiae* (rectius: *Cephaliae*) Panz. Jur. et imprimis ejus subgeneris *Caenolidae* Konow proximum, sed alis superioribus nervo brachiali abbreviato valde obliquo, fere longitudinaliter sito, n. intercostali costae valde approximato; alis omnibus luxuriose obscure fusco-cyaneo decoratis, nervis crassis, maxima ex parte unacum stigmate expallidis; antennis scapo sequentibus articulis multo crassiore articulo 3-o valde elongato, longitudinem quatuor sequentium unitorum fere adaequante, manifeste e quinque articulis connatis composito ab omnibus generis *Cephalia* speciebus divergit. Statura major; forma valida; habitus peculiaris.

Typus: *Tenthredo reticulata* L. 1758.

Dictyolyda reticulata L.** представляет несомненно древний тип в подсемействе *Pamphiliinae* (о чем свидетельствует, между прочим, строение 3-го членика антенн, сохраняющего следы пяти спаянных между собою члеников) и является одним из последних фрагментов указанного рода. Этим объясняется, повидимому, редкость и спорадичность нахождения насекомого при его сжатом ареале обитания.

В пределах СССР *D. reticulata* (L.) встречается, повидимому, только в западной и центральной частях европейской территории Союза. Для Ленинградской области этот вид был приведен впервые В. Падалкой ([3]), который нашел его в Лужском уезде в июне 1910 г. в сосновых насаждениях на чернике (*Vaccinium myrtillus*), — на последнем растении вероятно случайно. Кроме этого местонахождения мне известны в пределах Ленинградской области и соседней Эстонии, а также Финляндии, еще следующие: Шувалово (Петров! 1833); Лахта (В. Х. Шмидт! 18 VI 1899, Ф. В. Ба-

* *Cephaleia (Caenolyda) hartigi* (Bremi 1849).

** Лучшее описание этого вида см. у Конова ([2]); изображение (♀) у него-же (l. c., 1905, tab., fig. 6). На указанном рисунке имеются, впрочем, крупнейшие неточности: строение антенн, а именно 3-го их членика, передано совершенно неверно; так же неверно передан цвет жилок на крыльях: они имеют на самом деле не розовую, а бледнопалевую окраску.

ровский! 26 VI 1918); Шмецк (В. Мазаракий! VII 1899 „на песке“); Гапсаль (И. Оберт! колл. Ф. Моравица); Терноки (А. А. Любищев! 7 VI 1906, 1 ♀). Кроме Ленинградской области *Dictyolyda reticulata* (L.) найдена недавно в окрестностях Киева ([4]).

В пределах б. Московской губернии она известна из Петровско-Разумовского (М. М. Золотарев, лето 1904 г., на можжевельнике, по свидетельству Б. А. Федченко ([5]).

В биологическом отношении вид этот мало еще изучен. Личинка (шоколадного цвета с более темными головой и частью thorax'a) развивается, по Рацебургу ([6]) и Конову ([2]), на обыкновенной сосне (*Pinus silvestris*).

Dictyolyda praeteritorum, sp. n.

♀ *D. reticulatae* (L.) simillima, sed minor (semperne?), antennis brevioribus, scapo paulo minus crasso, articulo 3-o vix nisi tribus sequentibus aequilongo, e quinque articulis omnino connatis, quam ob rem vix nisi indicatis composito; capite facie totâ cum clypeo, loris genisque exceptâ solum utrinque maculâ nigrâ supraantennali, temporibus excepto margine angusto postico nec non lateribus occipitis albidis (semperne?); capite subtilius minus crebre punctato, brevius et parcius pallido-piloso (saltem ad latera, in facie mandibulisque); pronoto non nigro- sed pallido- quoque piloso, mesonoto cum scutello multo parcius et obsoletius punctato, partim laevigato; abdominis dorso omnino impunctato, polito, nitido; alis superioribus nervo brachiali paulo minus obliquo, campo humerali minus constricto, cellulâ anali magis altâ ampläque, cubito nervoque medio in finibus cellulae discoidalis, hoc etiam apice sicut nervo anali majore ex parte infuscatis; ceteris signis atque dispositione colorum cum *D. reticulata* congruens. — Long. 11.2 mm, alae super. 9,5 mm; summa lat. abdominis 4.5 mm.

♂ nondum notus.

Sibiria occidentalis: Altai sine indicatione loci, probabiliter austro-occidentalis illius ora (M. Suvortzev!). — Solum specimen (1 ♀) (coll. F. Morawitzi, nunc in Mus. Zool. Acad. Sci. USSR).

Как явствует из этого сравнительного диагноза, второй вид рода *Dictyolyda* отличается редкими структурными особенностями от нашей *D. reticulata* (L.). Замечательно, что он сохраняет при этом ближайшее сходство с последней не только в характере и системе цветорасположения на всех частях тела, не исключая и крыльев, но и в общем своем облике.

Весьма характерно, что *Dictyolyda reticulata* Sem. живет в юго-западной части Алтая, фауна которой является ярким очагом третичных реликтов, в большинстве случаев узких эндемиков. Реликты эти из отряда *Coleoptera* отличаются здесь блестящей внешностью, яркими металлическими окрасками и относительно крупной величиной. Назовем эндемичных в юго-западном Алтае: *Carabus gebleri* Fisch.-W., *C.* (*Megodontus*) *imperialis* Fisch.-W., *C.* (*Megodontus*) *panzeri* Dej. & Boisd., *C.* (*Megodontus*) *obovatus* Fisch.-W., *Platysma* (*Pterostichus*) *consors* Tschitsch., *Chrysomela pterosticha* Fisch.-W. и др.

Все это формы, дожившие до наших дней в совершенно, повидимому, неизмененном виде по крайней мере с нижнего плиоцена.

Зоологический институт
Академии Наук.
Ленинград.

Поступило
25 V 1934.

ZOOLOGIE

ÜBER EINE NEUE GATTUNG DER SUBFAMILIE *PAMPHILIINAE* (*HYMENOPTERA, PAMPHILIIDAE*)

Von A. SEMENOV-TIAN-SHANSKIJ

(Vorgelegt von S. Zernov, Mitglied der Akademie, d. 25. V. 1934)

Die im mittleren und teilweise im nördlichen Europa selten vorkommende *Cephaleia* (richtiger: *Cephalia*) *reticulata* (L. 1758), welche früher in die Gattung *Lyda* Fabr. versetzt wurde, war von Fr. W. Konow in die von ihm im J. 1897 (1) festgestellte Untergattung *Caenolyda* (2) eingefügt worden. Diese Art steht aber in der gegenwärtigen Fauna dermassen abgesondert da, so scharf unterscheidet sie sich durch einige morphologische Eigentümlichkeiten und durch ihren ganzen Habitus von der zweiten bisher bekannten paläarktischen, * und auch von allen nearktischen Vertretern der Untergattung *Caenolida* Knw., dass sie unbedingt in eine besondere Gattung ausgeschieden werden muss, unabhängig davon, ob die Gruppe *Caenolyda* Knw. als eine selbständige Gattung oder als Untergattung der Gattung *Cephaleia* (richtiger: *Cephalia*) Panz., Jur. betrachtet wird.

Die neue Gattung kann durch folgende Eigentümlichkeiten characterisiert werden:

DICTYOLYDA, gen. nov.

Genus subfamiliae *Pamphiliinarum, Cephaleiae* (rectius: *Cephaliae*) Panz. Jur. et imprimis ejus subgeneris *Caenolydae* Konow proximum, sed alis superioribus nervo brachiali abbreviato valde obliquo, fere longitudinaliter sito, n. intercostali costae valde approximato; alis omnibus luxuriose obscure furco-cyaneo decoratis, nervis crassis, maxima ex parte unacum stigmate expallidis; antennis scapo sequentibus articulis multo crassiore articulo 3-o valde elongato, longitudinem quatuor sequentium unitorum fere adaequante, manifeste e quinque articulis connatis composito ab omnibus generis *Cephalia* speciebus divergit. Statura major; forma valida; habitus peculiaris.

Typus: *Tenthredo reticulata* L. 1758.

Dictyolyda reticulata L.** stellt ohne Zweifel einen alten Typus in der Unterfamilie *Pamphiliinae* dar (wovon, unter anderm, die Structur des dritten Gliedes der Antennen zeugt, welches Spuren von fünf mit einander zusammenfliessenden Glieder bewahrt), und ist als eins der letzten Fragmente der bezeichneten Gattung zu betrachten. Damit erklären sich, scheinbar, die Seltenheit und die Sporadität des Vorfindens des Insekts mit einem beschränkten Areale.

Im Bereich der USSR kommt die *D. reticulata* (L.), wie es scheint, nur im Westen und im Zentrum des europäischen Teiles der Union vor. Für das Gebiet von Leningrad wird diese Art zum erstenmal von W. Padalka (3) erwähnt, der sie im Luga-Bezirk im Juni 1910 in den Kieferbeständen auf der Schwarzbeere (*Vaccinium myrtillus*) gefunden hatte, auf der letzteren Pflanze wahrscheinlich zufälligerweise. Ausser diesem Fundort sind uns, im Bereich des Gebietes von Leningrad und des angrenzenden ehemaligen Estländischen Gouvernements (Estland), sowie Finnlands

* *Cephaleia (Caenolyda) hartigi* (Bremi 1849).

** Die beste Beschreibung dieser Art s. bei Konow (2), daselbst auch die Abbildung (♀) (l. c. 1905, tab, fig. 6). Diese Abbildung leidet übrigens an grossen Ungenauigkeiten: die Struktur der Fühler, nämlich ihres dritten Gliedes, ist ganz falsch wiedergegeben; ebenso falsch ist die Farbe der Adern auf den Flügeln wiedergegeben: in der Tat ist die Färbung nicht rosenrot, sondern blasshellgelb.

noch folgende bekannt: Schuwalowo (Petrov! 1883); Lachta (W. Schmidt! 18. VI. 1899, H. Barovskij! 26. VI. 1918); Schmetzk (V. Mazarakij! VII. 1899 „auf dem Sande"); Hapsal (J. Obert! Coll. F. Morawitz); Terijoki (A. Ljubiščev! 7. VI. 1906, 1 ♀). Ausser dem Gebiete von Leningrad ist die *Dictyolyda reticulata* (L.) neulich in der Umgebung von Kiew entdeckt worden (4). Im Bereich des ehemaligen Moskauer Gouvernements ist sie aus Petrovsko-Rasumowskoje bekannt (M. Zolotarev, Sommer 1904) auf einem Wachholderstrauche, nach Zeugnis von B. Fedčenko (5).

In biologischer Hinsicht ist diese Art bis jetzt noch wenig erforscht. Die Larve (schokoladenfarbig mit dunkleren Kopf und Teil des thorax) entwickelt sich, nach Ratzeburg (6) und Konow (1901—1905), auf der gewöhnlichen Kiefer (*Pinus silvestris*).

Dictyolyda praeteritorum, sp. n.

D. reticulatae (L.) simillima, sed minor (semperne?), antennis brevioribus, scapo paulo minus crasso, articulo 3-o vix nisi tribus sequentibus aequilongo, e quinque articulis omnino connatis, quam ob rem vix nisi indicatis composito; capite facie totâ cum clypeo, loris genisque exceptâ solum utrinque maculâ nigrâ supraantennali, temporibus excepto margine angusto postico nec non lateribus occipitis albidis (semperne?); capite subtilius minus crebre punctato, brevius et parcius pallido-piloso (saltem ad latera, in facie mandibulisque); pronoto non nigro- sed pallido- quoque piloso, mesonoto cum scutello multo parcius et obsoletius punctato, partim laevigato; abdominis dorso omnino impunctato, polito, nitido; alis superioribus nervo brachiali paulo minus obliquo, campo humerali minus constricto, cellulâ anali magis altâ amplâque, cubito nervoque medio in finibus cellulae discoidalis, hoc etiam apice sicut nervo anali majore ex parte infuscatis; ceteris signis atque dispositione colorum cum *D. reticulata* congruens. — Long. 11.2 mm, alae super. 9.5 mm; summa lat. abdominis 4.5 mm.

♂ nondum notus.

Sibiria occidentalis: Altai sine indicatione loci, probabiliter austro-occidentalis illius ora (M. Suvortzev!). — Solum specimen (1 ♀) (coll. E. Morawitzi, nunc in Mus. Zool. Acad. Sci. USSR).

Wie aus dieser vergleichenden Diagnose klar zu ersehen ist, unterscheidet sich die zweite Art der Gattung *Dictyolyda* von unserer *D. reticulata* (L.) durch seltene Structureigentümlichkeiten. Bemerkenswert ist, dass sie dabei die grösste Ähnlichkeit mit der letzteren nicht nur im Character und System der Farbenanordnung auf allen Teilen des Körpers, die Flügel nicht ausgenommen, sondern auch in ihrem allgemeinen Aussehen behält.

Sehr charakteristisch ist der Umstand, dass *Dictyolyda reticulata* Sem. im südwestlichen Teile des Altai wohnt, dessen Fauna als ein auffallender Herd tertiärer Relikten, in den meisten Fällen strenger Endemiker gilt. Diese Relikten aus der Ordnung *Coleoptera* zeichnen sich hier durch ein auffallendes Äusseres, lebhafte Metallfärbungen und verhältnissmä-ssig ansehnliche Grösse aus. Nennenswert sind, die im Südwest-Altai endemischen *Carabus gebleri* Fisch.-W., *C.* (*Megodontus*) *imperialis* Fisch.-W., *C.* (*Megodontus*) *panzeri* Dej. & Boisd., *C.* (*Megodontus*) *obovatus* Fisch.-W., *Platysma* (*Pterostichus*) *consors* Tschitsch., *Chrysomela pterosticha* Fisch.-W. und andere. Alles dies sind Formen, die mindestens vom unteren Pliozän bis zu unseren Tagen in scheinbar vollkommen unveränderter Gestalt lebendig geblieben sind.

Zoologisches Institut
der Akademie der Wissenschaften.
Leningrad.

Eingegangen
d. 25. V. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Konow. Ann. Naturhist. Hofmus. Wien, XII, 1897, p. 15. [2] Konow. System. Zusammenst. d. bisher bekannt geword. *Chalastogastra*, 1901—1905, p. 176. — Id. *Hymenoptera*, fam. *Lydidae* in Wytsman, Gen. Insect., fasc. 27, 1905, p. 9. [3] Падалка. Русск. энт. обозр., XIV, 1915, стр. 471. Padalka. Revue russe d'Entom., XIV, 1915, p. 471. [4] В. Лучник. Русск. энт. обозр., XVI, 1917, стр. 411. W. Lučnik. Revue russe d'Entom., XVI, 1917, p. 411. [5] Федченко. Дневник Зоол. отд. Общ. люб. естествозн., антроп. и этногр., т. III, № 6, стр. 25. Fedčenko. Tagebuch der zool. Abteilung der Gesellsch. für Naturwiss., Anthrop. und Ethnogr., Bd. III, № 6, p. 25. [6] Ratzeburg. Forstinsect., III, 1844, p. 80 sq.

ЗООЛОГИЯ

А. Н. СВЕТОВИДОВ

О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ХАРАКТЕРОМ ПИЩИ И КОЛИЧЕСТВОМ ПИЛОРИЧЕСКИХ ПРИДАТКОВ У РЫБ

(*Представлено академиком С. А. Зерновым 4 V 1934*)

Приспособление к роду пищи различных частей пищеварительного тракта на протяжении между ртом и желудком достаточно хорошо известно. Наиболее хорошо изучена у рыб зависимость между характером пищи и количеством жаберных тычинок, довольно детально разобранная и иллюстрированная многочисленными примерами Цандером ([1]) (главным образом пресноводные рыбы) и Штейером (адриатические рыбы). Особенно наглядный пример такого рода зависимости представляют каспийские сельди ([1]): планктоноядные *Caspialosa caspia* имеют от 85 до 138 жаберных тычинок, в то время как хищники *Caspialosa brashnikovi* и *Caspialosa saposhnikovi* имеют лишь от 23 до 47 жаберных тычинок.

Кое что, но очень мало, известно о приспособлении к роду пищи кишечника и желудка рыб. Так, например, известно, что у растительноядных рыб кишечник значительно длиннее, чем у хищных рыб. Кроме того, у некоторых рыб ([2]) (*Mugil*) в связи с особенностями питания стенки пилорической части желудка сильно утолщены, и таким образом эта часть желудка превращается как бы в мускульный желудок, где пища несколько размельчается. Такое строение пилорической части желудка и точно также в связи с особенностями питания отмечено нами ([3]) и у *Thymallus arcticus baicalensis* и *Caspialosa caspia*.

Приспособление же к роду пищи других частей кишечного тракта рыб почти не изучено. Как одно из таких приспособлений следует рассматривать зависимость между характером пищи и количеством пилорических придатков (appendices pyloricae). Как оказывается, количество пилорических придатков находится в обратной зависимости от рода пищи, чем количество жаберных тычинок, т. е. рыбы, питающиеся более крупной пищей, имеют большее количество пилорических придатков, чем рыбы, питающиеся более мелкими организмами.

Впервые зависимость такого рода была отмечена нами у каспийских сельдей ([3]). Планктоноядная *Caspialosa caspia* имеет наименьшее количество пилорических придатков (от 30 до 59, в среднем 40.8). Сельди же, исключительно или в значительной степени питающиеся рыбой, например *Caspialosa brashnikovi*, *Caspialosa kessleri* и *Caspialosa saposhnikovi*, имеют большие количества пилорических придатков (*C. brashnikovi* — 39—71, в среднем 51.2, *C kessleri* — 36—62, в среднем 48.2, *C. saposhnikovi* — 36—59, в среднем 45.9) — каждый вид в зависимости от степени участия рыбы в его питании. Такая же зависимость между характером пищи и количеством пилорических придатков констатирована и у байкальских хариусов.

Thymallus arcticus baicalensis, имеющий от 11 до 20 пилорических придатков (в среднем 15.3), питается главным образом воздушными насекомыми (в 35.7% исследованных желудков) и амфиподами (33.7%), в то время как *Thymallus arcticus baicalensis* infrsbsp. *brevipinnis*, имеющий 16—24 (в среднем 19.1) пилорических придатков, питается в основном рыбой (в 60.7% исследованных желудков).

Подобную же зависимость между характером пищи и количеством пилорических придатков можно отметить и у камбал из рода *Pleuronectes*.

По исследованиям Дункера количество пилорических придатков у *Pleuronectes platessa* и *Pleuronectes flesus* таково ([4]):

Таблица 1 — Table 1

	Pl. flesus	*Pl. platessa*
Количество пилорических придатков Number of pyloric caeca	0—3	2—4

Главную пищу *Pl. platessa* ([4]) составляют моллюски, в то время как *Pl. flesus* в значительной степени помимо моллюсков питается ракообразными и червями, т. е. организмами несколько более мелкими.

В еще большей степени зависимость между характером пищи и количеством пилорических придатков наблюдается у тресковых рыб. Количества пилорических придатков у *Boreogadus saida* (по нашим исследованиям), *Eleginus navaga* и *Gadus morhua* ([5]) таковы:

Таблица 2 — Table 2

	B. saida	*E. navaga*	*G. morhua*
Количество пилорических придатков Number of pyloric caeca	20—37	31—55	207
Количество исследованных рыб Number of fishes examined	101	138	1

Основной пищей ([6]) *Boreogadus saida* являются *Euphasidae* (в 59.5% исследованных желудков) и планктические организмы — *Calanus finmarchicus* (34.4%). *Crangonidae* обнаружены только в 16, *Amphipoda* в 3 и *Pisces* только в 1 из 311 исследованных Тилеманном желудков *Boreogadus saida*. *Eleginus navaga* по неопубликованным исследованиям В. К. Солдатова* питается главным образом амфиподами и планктоном; меньшее значение имеют *Mysidae* и *Vermes*. Рыбы в питании *Eleginus navaga* играют уже большую роль, чем в питании *Boreogadus saida*; из 175 исследованных В. К. Солдатовым желудков наваги остатки рыб найдены в 13. Главную роль в питании *Gadus morhua* играют *Pisces* (14—88%): сельдь, мойва, песчанка и др. и бенто-нектические и планктические *Crustacea* (*Pandalus*, *Rhoda*).

* Пользуюсь случаем высказать глубокую благодарность В. К. Солдатову за любезное сообщение и разрешение использовать эти данные.

Сопоставив эти данные с количеством пилорических придатков у этих рыб, видно, насколько велика зависимость у тресковых между характером пищи и количеством пилорических придатков: чем крупнее организмы, которыми питается тот или иной вид рыб, тем больше он имеет пилорических придатков.

Зависимость между характером пищи и количеством пилорических придатков может быть констатирована и у представителей сем. *Percidae*. Так например, количество пилорических придатков, просчитанное нами у *Lucioperca lucioperca*, *Lucioperca marina* и *Lucioperca volgensis*, колеблется в следующих пределах:

Таблица 3 — Table 3

	L. volgensis	*L. marina*	*L. lucioperca*
Количество пилорических придатков Number of pyloric caeca	3	5—7	6—9
Количество исследованных рыб Number of fishes examined	5	25	16

Lucioperca lucioperca поедает (7) главным образом мелкую рыбу длиной 8—10 см и максимально до 12—14 см. Кроме того, *Lucioperca lucioperca* поедает лягушек, моллюсков, насекомых и их личинок, но роль этих организмов в его питании незначительна. *Lucioperca marina* в основном питается бычками, затем килькой, атеринкой, молодью сельди, раками. *Lucioperca volgensis*, имеющий наименьшее количество пилорических придатков, питается мальками-сеголетками 4—5 см длиной. В мае месяце поедает и ракообразных и личинок насекомых (*Chironomus*). Следовательно зависимость такого рода наблюдается и здесь.

Таким образом, зависимость между характером пищи и количеством пилорических придатков в настоящее время может быть констатирована у представителей 5 семейств — *Clupeidae*, *Thymallidae*, *Pleuronectidae*, *Gadidae* и *Percidae*, относящихся к разным отрядам костистых рыб. При этом зависимость такого рода у рыб наблюдается в пределах самых разнообразных систематических категорий. Мы видели, что в зависимости от рода пищи количество пилорических придатков изменяется у представителей разных родов в пределах одного и того же семейства, как в примере с тресковыми рыбами (Boreogadus, Eleginus, Gadus), и в пределах более мелких систематических единиц — у разных видов одного и того же рода (представители родов *Caspialosa*, *Pleuronectes*, *Lucioperca*) и у более мелких систематических форм одного и того же вида (формы байкальских хариусов). Несомненно, что подобное же приспособление к роду пищи имеется и у других групп рыб, у представителей которых имеются пилорические придатки. Установив зависимость между характером пищи и количеством пилорических придатков, остановимся на выяснении значения этого приспособления.

Какова физиологическая функция пилорических придатков в пищеварении рыб, не совсем ясно. По исследованиям одних авторов (8), пилорические придатки, подобно кишечнику, играют только абсорбирующую роль, по исследованиям других авторов пилорическим придаткам некоторых рыб свойственна, повидимому, и секреторная роль. Несомненно ясным

является лишь то, что пилорические придатки увеличивают поверхность пищеварительного тракта, в одном случае секреторную, в другом абсорбирующую, что в интересующем нас отношении является важным почти в равной мере: в первом случае выделяется большее количество пищеварительных соков, во втором происходит более полное усвоение пищи. Большее количество пилорических придатков у рыб, питающихся более крупной, а следовательно и более медленно перевариваемой пищей (громадное большинство рыб, как известно, заглатывает пищу целиком), способствует более полному усвоению пищи не только вследствие происходящего при этом увеличения поверхности пищеварительного тракта. Пища, попав в пилорические придатки — эти слепые выросты кишечника, благодаря этому задерживается в кишечнике более долгое время и более полно усваивается.

Зоологический институт
Академии Наук. Ленинград.

Получено
4 V 1934.

ZOOLOGY

ON THE CORRELATION BETWEEN THE CHARACTER OF FOOD AND THE NUMBER OF PYLORIC CAECA IN FISHES

By A. SVETOVIDOV

(*Communicated by S. Zernov, Member of the Akademy, 4. V. 1934*)

It is well known that the various parts of the alimentary canal between the mouth and the stomach are adapted to the character of food. The correlation between the character of the food of fishes and the number of gill-rakers is a well established fact. It has been investigated in detail and illustrated by numerous examples by Zander (1) (chiefly freshwater fishes) and Steuer (Adriatic fishes). A striking example of such a correlation is seen in the Caspian herrings (2): *Caspialosa caspia*, which lives on planktonic organisms, has from 85 to 138 gill-rakers, while the carnivorous *Caspialosa brashnikovi* and *Caspialosa saposhnikovi* have only from 23 to 47 gill-rakers.

Very little is known about the adaptation of the intestine and stomach of fishes to the kind of food. We know, for instance, only that herbivorous fishes have considerably longer alimentary canal than carnivorous ones. Moreover, some fishes (2) (*Mugil*), owing to the character of food, have very thick walls of the pyloric part of the stomach, and so this part of the stomach is converted into gizzard, as it were, where food is crushed to a certain extent. Such a structure of the pyloric part of the stomach, also due to the peculiarities of nourishment, has been observed by us (3) in *Thymallus arcticus baicalensis* and *Caspialosa caspia*.

The adaptation of other parts of the alimentary canal of fishes to the character of food has not yet been studied to any considerable extent. The correlation between the character of food and the number of pyloric caeca may be regarded as one of such adaptations. The number of pyloric caeca stands in an inverse corelation to the character of food, as compared with the number of gill-rakers, i. e. the fishes living on larger organisms have a higher number of pyloric caeca than those feeding on smaller ones.

Such a correlation has been observed for the first time in Caspian herrings (3). *Caspialosa caspia*, which lives chiefly on planktonic organisms, has a small number of pyloric caeca (from 30 to 59, 40.8 on an average). Herrings feeding exclusively or to a considerable extent on fishes, for

example *Caspialosa brashnikovi*, *Caspialosa kessleri*, and *Caspialosa saposhnikovi*, have a larger number of pyloric caeca (*C. brashnikovi* — 39—71, 51.2 on an average, *C. kessleri* 36—62, 48.2 on an average, *C. saposhnikovi* 36—59, 45.9 on an average), according to the extent to which fish forms part of their food. The same correlation between the character of food and the number of pyloric caeca has been established in the Baikal graylings. *Thymallus arcticus baicalensis*, which has from 11 to 20 pyloric caeca (15.3 on an average), feeds chiefly on air insects (in 35.7% of the stomachs examined) and amphipods (33.7%), while *Thymallus arcticus baicalensis* infrsbsp. *brevipinnis*, which has 16—24 (19.1 on an average) pyloric caeca, feeds chiefly on fishes (in 60.7 % of the stomachs examined). A similar correlation between the character of food and the number of pyloric caeca may be observed in the plaices of the genus *Pleuronectes*. According to Duncker's investigations, the number of pyloric caeca in *Pleuronectes platessa* and *Pleuronectes flesus* (4) is as follows (see table 1, p. 68).

Pl. platessa feeds chiefly on molluscs (4), while *Pl. flesus* feeds to a considerable extent on crustaceans and worms besides molluscs, i. e. on somewhat smaller organisms.

The correlation between the character of food and the number of pyloric caeca is still more striking in gadoid fishes. The number of pyloric caeca in *Boreogadus saida* (according to our examinations), *Eleginus navaga*, and *Gadus morhua* (5) are shown in table 2 (p. 68).

The principal food of *Boreogadus saida* are the *Euphasidae* (in 59.5% of the stomachs examined) and the planctonic organisms — *Calanus finmarchicus* (34.4%). *Crangonidae* have been found only in 16, *Amphipoda* in 3, and *Pisces* only in 1 out of 311 stomachs of *Boreogadus saida* examined by Thielemann. *Eleginus navaga*, according to the examinations of V. Soldatov* (unpublished yet), feeds chiefly on amphipods and minute planctonic organisms; *Mysidae* and *Vermes* are of less importance. Fishes form a greater part of the food of *Eleginus navaga* than of that of *Boreogadus saida*; out of 175 stomachs of *E. navaga* examined by V. Soldatov, fishes were found in 13. *Pisces* (14—88%) [herring (*Cl. harengus*), capelin (*M. villosus*), sand-eel (*Amm. tobianus*), and others] and the benthonectic and planctonic *Crustacea* (*Pandalus*, *Rhoda*) form the greater part of the food of *Gadus morhua*.

A comparison of these data with the number of pyloric caeca in these fishes shows to what an extent the character of food depends in gadoid fishes upon the number of pyloric caeca: the bigger the organisms on which the given species feeds, the more pyloric caeca it has.

The correlation between the character of food and the number of pyloric caeca may be observed also in the fishes of the family *Percidae*. For example, the number of pyloric caeca, as counted by us in *Lucioperca lucioperca*, *Lucioperca marina*, and *Lucioperca volgensis*, varies within the following limits (see table 3, p. 69).

Lucioperca lucioperca feeds (7) mostly on small fishes, 8—10 and at most up to 12—14 cm long. Besides, *Lucioperca lucioperca* eats frogs, molluscs, insects and their larvae, but the importance of these organisms in its nourishment is insignificant. *Lucioperca marina* feeds chiefly on *Gobiidae*, some species of *Glupeonella*, *Atherina pontica caspia*, small herrings, crawfishes. *Lucioperca volgensis*, which has the least number of pyloric caeca, feeds on young fishes 4—5 cm long. In May it eats also

* I take the opportunity to express my thanks to Prof. V. Soldatov for the communication and permission to make use of these data.

crustaceans and the larvae of insects (*Chironomus*). Therefore, the above mentioned correlation may be observed here also.

Thus, the correlation between the character of food and the number of pyloric caeca has been observed in the fishes belonging to 5 families — *Clupeidae*, *Thymallidae*, *Pleuronectidae*, *Gadidae*, and *Percidae* — which belong to various divisions of the *Teleostei*. Moreover, such a correlation may be observed within the most varied systematic divisions. We have seen that the number of pyloric caeca varies according to the character of food in fishes belonging to different genera of one and the same family, as in the case of gadoid fishes (*Boreogadus*, *Eleginus*, *Gadus*), as well as in different species of the same genus (species of the genera *Caspialosa*, *Pleuronectes*, and *Lucioperca*) and different subspecies of the same species (Baikal graylings). There is no doubt that a similar adaptation to the character of food exists in other groups of fishes that have pyloric caeca.

Having established the correlation between the character of food and the number of pyloric caeca, we shall now discuss the significance of this adaptation.

The physiological function of pyloric caeca in the digestion of fishes is not quite clear. According to the investigations of some authors [8], pyloric caeca, like the intestine, are only an absorbent organ, according to other authors, pyloric caeca of some fishes seem to perform a secretory function as well. The only certain thing about it is that pyloric caeca enlarge the surface of the alimentary tract, in one case the secretory surface, in the other the absorbent one, which is of almost equal importance with regard to the problem under consideration: in the first case a greater quantity of digestive juices is secreted, in the second case a fuller assimilation of food is observed to occur. A greater number of pyloric caeca in the fishes feeding on organisms of a greater size, which are consequently digested more slowly (a great majority of fishes, as is known, swallow their food whole), makes for a fuller assimilation of food, not only owing to the enlargement of the surface of the alimentary tract. Entering the pyloric caeca — these blind outgrowths of the intestine — the food remains in the intestine for a longer time and is more completely assimilated by the system.

Institute of Zoology
of the Academy of Sciences.
Leningrad.

Received
4. V. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] E. Zander. Z. Wiss. Zool., CXXV, 1903, S. 233. — A. Steuer. Verh. zool.-bot. Gesellsch., Wien, CV, 1905, S. 275. — А. Державин. Тр. Астрах. ихтиол. лаборатории, IV, 3, 1918, стр. 1. A. Derjavin. Trav. du Laborat. ichth. d'Astrakhan, IV, fasc. 3, 1918, p. 1. — Л. Берг. Рыбы пресных вод СССР, I, 1932. L. Berg. Poiss. des eaux douces de L'URSS, I, 1932. [2] W. Gregory. Science, n. s., XX, 1904, p. 888. [3] А. Световидов. ДАН, сер. А, 1932, стр. 202. A. Svetovidov. C. R. de l'Acad. d. Sci de l'URSS, 1932, p. 202. [4] G. Duncker. Variation u. Verwandtschaft von *Pleuronectes flesus* u. *Pl. platessa*, Kiel, 1895. В. Ланшин. Русск. зоол. журн., VIII, вып. 4, 1928, стр. 17. W. Lanschin. Rev. zool. russe, VIII, livr. 4, 1928, p. 17. — F. Smitt. A History of Scandinavian Fishes, I, 1895. [6] Thielemann. Arb. deutsch. wiss. Komm. für intern. Meeresforsch., № 28, 1921, p. 215. — M. Idelson. Hydrobiol. Z., VIII, № 10—12, 1929, p. 269. [7] Е. Забелин. Мат. к позн. русск. рыбол., IV, 4, 1915, стр. 1. E. Zabelin. Contrib. to the knowledge of Russian Fisheries, IV, 4, 1915, p. 1. — Н. Чугунова и Ф. Егерман. Бюлл. Всекасп. эксп., № 5—6, 1932, стр. 90. N. Cugunova and F. Jägermann. Bull. Fishery Exped. of the Casp. Sea, № 5—6, 1932, p. 90. [8] C. Vogt u. E. Yung. Lehrb. d. pract. vergl. Anatomie, II. — B. Dawes. Quart. Journ. Micr. Sci., LXXVIII, 1929, p. 243. — C. Krukenberg. Unters. physiol. Inst. Univers. Heidelberg, I, 1878, p. 327.